



# Aspects twistoriels des applications semi-conformes

Mohammad Wehbe

## ► To cite this version:

Mohammad Wehbe. Aspects twistoriels des applications semi-conformes. Mathématiques [math]. Université de Bretagne occidentale - Brest, 2009. Français. NNT : . tel-00461149

**HAL Id: tel-00461149**

**<https://theses.hal.science/tel-00461149>**

Submitted on 3 Mar 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse

présentée devant

**l'Université de Bretagne Occidentale**

pour obtenir le grade de :

**Docteur de l'Université de Bretagne Occidentale**

Mention Mathématiques

par

**Mohammad Wehbe**

École Doctorale SICMA

(Santé, Information-Communications, Mathématiques, Matière)

Titre de la thèse :

## **Aspects twistoriels des applications semi-conformes**

Soutenue le 23 novembre 2009 devant le jury composé de :

Paul Baird	Professeur (U.B.O.)	Directeur de thèse
Frédéric Hélein	Professeur (Univ. Paris 7)	Rapporteur
Stephen Hugget	Reader (Univ. de Plymouth)	Examineur
Jean-Philippe Nicolas	Professeur (U.B.O.)	Examineur
John C. Wood	Professeur (Univ. de Leeds)	Examineur



# Remerciements

Mes premiers remerciements seront pour mon directeur de thèse, Monsieur Paul Baird, pour avoir accepté de diriger mes premiers pas dans le monde de la recherche. Je lui dois bien plus que cette thèse et je le remercie en particulier pour sa constante disponibilité, pour sa patience et ses nombreuses propositions de nouveaux axes de recherche quand les premiers problèmes semblaient faire apparaître trop d'obstacles. Il m'a appris non seulement de très belles mathématiques, mais aussi son approche de la recherche que je garderai comme modèle.

Messieurs Frédéric Hélein et Lionel Mason ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, et je tiens à les remercier également pour la qualité de leur travail, ainsi que pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux scientifiques.

Je remercie Messieurs Stephen Hugget, Jean-philippe Nicolas et John C. Wood pour avoir accepté d'être mes examinateurs.

Merci à tous les membres du département de mathématiques au sein duquel ce travail fut effectué. Leurs compétences et qualités humaines ont grandement facilité mon travail, notamment mes amis doctorants.

Je remercie tous qui de près ou de loin m'ont permis de mener à bien cette thèse de doctorat et qui se sont intéressés à mes travaux.

Je garde le meilleur pour la fin, je m'incline respectueusement devant les deux êtres à qui je dois mon existence. J'ai longtemps cherché les mots qui seraient les plus justes pour vous remercier d'être toujours présents et de m'épauler quoi qu'il arrive. . . mais après mûre réflexion, je ne vois rien d'aussi fort que *je vous aime*. Tout ceci n'aurait pas été possible sans vous. C'est donc à vous que je dédie cette thèse.



# Table des matières

Introduction . . . . .	7
<b>1 Variétés riemanniennes, applications semi-conformes</b>	<b>13</b>
1.1 Variétés riemanniennes et semi-riemanniennes . . . . .	13
1.2 Applications semi-conformes . . . . .	16
1.2.1 Définition . . . . .	16
1.2.2 Formulation variationnelle . . . . .	19
1.2.3 Les coordonnées canoniques d'une application semi-conforme . . . . .	21
1.2.4 Feuilletages conformes . . . . .	23
1.3 Applications semi-conformes avec fibres de dimension 1 . . . . .	24
1.3.1 Coordonnées canoniques avec fibres de dimension 1 . . . . .	24
1.3.2 Feuilletages conformes par des cercles dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	25
1.3.3 Quantité conservée pour les applications semi-conformes . . . . .	26
1.4 Morphismes harmoniques, applications biharmoniques . . . . .	31
1.4.1 Applications et morphismes harmoniques . . . . .	31
1.4.2 Applications biharmoniques dont les fibres sont des arcs de cercles . .	33
1.5 Graphes et réseaux . . . . .	37
<b>2 L'espace de Minkowski, algèbre de spineurs</b>	<b>41</b>
2.1 Notation spinorielle . . . . .	42
2.2 Reformulation spinorielle . . . . .	43
2.2.1 Les morphismes harmoniques définis sur $\mathbb{R}^4$ en terme de spineurs . .	43
2.2.2 Les morphismes harmoniques définis sur l'espace de Minkowski en terme de spineurs . . . . .	45
2.2.3 Notation spinorielle dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	46
2.3 Correspondance twistorielle . . . . .	48
2.3.1 Rayon de lumière . . . . .	48
2.3.2 Espace twistoriel . . . . .	49
2.3.3 Surface twistorielle . . . . .	51
2.3.4 Congruence de rayons de lumière sans cisaillement . . . . .	53
2.4 Intégrabilité des champs spinoriels . . . . .	54
2.5 Les solutions isotropes de l'équation des ondes . . . . .	56

<b>3</b>	<b>Evolution des applications semi-conformes</b>	<b>63</b>
3.1	Evolution des applications semi-conformes dans $\mathbb{M}$ . . . . .	63
3.1.1	Intégrabilité . . . . .	63
3.1.2	Equations d'une SFR . . . . .	65
3.1.3	Evolution d'un feuilletage conforme géodésique . . . . .	66
3.2	Forme invariante de l'évolution d'une application semi-conforme . . . . .	66
3.3	Evolution du couple métrique et application semi-conforme . . . . .	73
<b>4</b>	<b>Propriétés combinatoires d'un graphe fini</b>	<b>85</b>
4.1	Graphe fini . . . . .	86
4.1.1	Propriétés des fonctions définies sur un graphe fini . . . . .	86
4.1.2	L'équation de la chaleur d'un graphe fini . . . . .	89
4.1.3	Courbure d'un graphe fini . . . . .	96
4.2	Applications semi-conformes et fonctions holomorphes sur un graphe . . . .	97
4.3	Champ spinoriel sur un graphe . . . . .	104
4.4	Graphe dual . . . . .	105
<b>A</b>	<b>Formule intégrale pour une classe d'applications biharmoniques</b>	<b>109</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>113</b>

# Introduction

Les thèmes de cette thèse se situent dans le domaine de la géométrie conforme et l'étude des champs de particules sans masse. Elle est portée sur l'étude des morphismes harmoniques et des applications semi-conformes entre les variétés riemanniennes et semi-riemanniennes avec ses aspects spinoriels.

La base de notre étude est la correspondance twistorielle de Penrose qui associe à chaque géodésique dans l'espace de Minkowski, un point d'une hypersurface de l'espace complexe projectif de dimension 3, ainsi, la résolution d'une équation aux dérivées partielles devient un problème (d'ordre 1) de la géométrie complexe analytique. Les deux objets qui nous permettront de généraliser des constructions connues à d'autres situations, par exemple aux espaces temps avec courbure, aux graphes finis, sont (i) une application semi-conforme, et (ii) une congruence de rayons de lumière sans cisaillement ("shear-free ray congruence" que nous abrègerons ultérieurement par SFR). En effet, une SFR correspond à une famille d'applications semi-conformes évoluant dans le temps (voir le chapitre 3), cette dernière est bien adaptée à un cadre plus général. Cette perspective nous permet d'achever partiellement notre but c'est-à-dire d'obtenir une description combinatoire des champs dans l'esprit des "spin networks" introduits par Penrose en 1971 [22].

Un aspect de mon travail est l'étude des morphismes harmoniques, définis sur un espace-temps à valeurs dans une surface, leurs relations avec les applications semi-conformes (considérées comme des champs physiques) en dimension 3 ainsi que l'évolution de celles-ci au cours du temps. D'autre part, on développe la théorie des applications semi-conformes adaptée à nos besoins. On démontre notamment l'existence des coordonnées canoniques pour de telles applications ; une loi de conservation lorsque les fibres sont de dimension 1 ; la conservation de la semi-conformalité d'une application par rapport à une évolution naturelle ; on classe les applications semi-conformes biharmoniques dans  $R^3$  dont les fibres sont des arcs de cercles et on obtient une formule intégrale pour la représentation d'une famille d'applications biharmoniques (pas nécessairement semi-conformes) plus générale. On va mettre au point un formalisme élégant pour étudier les espaces-temps à quatre dimensions, les applications semi-conformes et les morphismes harmoniques définis sur cet espace, en faisant appel à des objets appelés spineurs. Ce formalisme nous permet d'étudier l'évolution des applications semi-conformes, ainsi l'évolution d'un champ de vecteurs tangents aux feuilletages conformes de ces applications.

Lorsqu'on prolonge nos idées aux graphes, on étudie la notion d'applications harmoniques et semi-conformes dans les graphes, dont la définition est proposée par H.Urakawa en 1997 [25]. On étudie les applications définies sur les graphes ainsi que leur évolution par rapport à l'équation de la chaleur (en temps discret). On définit la notion de courbure sur un graphe et on donne un analogue au théorème de Gauss-Bonnet [7] dans le cas discret. Afin de développer la théorie des twisteurs sur un graphe, on introduit notre propre définition d'une fonction holomorphe sur un graphe. Par ailleurs, on introduit la notion de graphe dual twistoriel, autrement connue sous le nom de "line graph". La correspondance entre un graphe et son dual twistoriel montre des aspects tout à fait analogues au cas continu, par exemple un sommet du graphe correspond à un sous graphe complet du graphe dual, qu'on



doit considérer comme la correspondance entre un point de l'espace de Minkowski et une copie de  $\mathbb{CP}^1$  dans l'espace des twisteurs. Dans le reste de cette introduction, on aborde les quatre chapitres de la thèse de manière plus détaillée.

Dans le premier chapitre, on présente les notions de base : variété riemannienne, semi-riemannienne, application semi-conforme, application harmonique et biharmonique, en démontrant certains nouveaux résultats qui seront utiles par la suite. D'abord, on démontre que *les applications semi-conformes sont des applications minimisantes pour une fonctionnelle conformément invariante, formée de la densité d'énergie et du jacobien de l'application* (Proposition 1.2.2). Ce résultat est important si l'on veut considérer une application semi-conforme comme un champ physique. Ensuite, on donne *une loi de conservation pour les applications semi-conformes* (Lemme 1.3.3). Or, en partant d'une application semi-conforme  $\varphi$  entre deux variétés riemanniennes  $(M^{n+1}, g)$  et  $(N^n, h)$  de dilatation  $\lambda$ , dont  $U$  est le vecteur tangent aux feuilletages de  $\varphi$ , on obtient  $\text{div}(\lambda^n U) = 0$  et  $\int_{\mathcal{S}} (\lambda^n U) \cdot d\vec{\sigma}$  conformément invariante et indépendante de  $\mathcal{S}$ , où  $\mathcal{S}$  est une hypersurface dans  $M^{n+1}$ . On rappelle aussi les applications biharmoniques entre les variétés semi-riemanniennes et on obtient une *caractérisation des applications biharmoniques semi-conformes dont les fibres sont des arcs de cercles* (Théorème 1.4.2). En effet, pour une application biharmonique semi-conforme  $z$  définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , telles que les fibres de  $z$  sont des arcs de cercles, la fonction  $z$  est localement donnée par

$$2z(x_1, x_2, x_3) = \frac{-|x|^2 - 2iA \cdot x + |A|^2}{x_1 \pm ix_2 + ai \mp b},$$

où  $A = (a, b, c)$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ . On montre aussi *l'existence des coordonnées canoniques pour les applications semi-conformes* (Théorème 1.2.1), et on caractérise localement la métrique de départ des ces applications définies entre deux variétés riemanniennes. On obtient que dans le cas d'une projection semi-conforme de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^n (m \geq n)$ , telle que  $h = h_{ij} dy^i dy^j$  est la métrique sur  $\mathbb{R}^n$ , la métrique de départ  $g$  est donnée par  $g_{ab} = \begin{pmatrix} \frac{h_{ij}}{\lambda^2} + A^{rs} f_{ir} f_{js} & \alpha f_{ir} \\ \alpha f_{js} & a_{rs} \end{pmatrix}$ , avec  $a, b = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n; r, s = n+1, \dots, m, a_{rs} = g_{rs}, f_{ir} = g_{ir}/\alpha, \alpha^2 = \det(a_{rs}), A^{rs} = \alpha^2 a^{rs}$  et  $a^{rs} = (a_{rs})^{-1}$ . On introduit aussi le concept de graphe ou réseau qui sera l'objet de base quand on discutera des champs combinatoires dans le quatrième chapitre. Par ailleurs, on aborde la notion d'application semi-conforme entre graphes, proposée par H.Urakawa. Par ailleurs l'on propose une définition des fonctions holomorphes définies sur les graphes.

Dans le deuxième chapitre, on étudie la théorie des twisteurs, initialement développée par Roger Penrose en 1967 : c'est la théorie mathématique qui fait correspondre les objets géométriques de l'espace temps à quatre dimensions (espace de Minkowski) à la géométrie des objets d'espace complexe de dimension quatre avec la signature de la métrique (1,3). Les coordonnées dans cet espace sont appelées "twisteurs" dont un rayon de lumière est l'objet le plus fondamentale. Or, la représentation d'un rayon de lumière par une paire de

spineurs, l'un définissant la direction de ce rayon, l'autre son moment par rapport à l'origine, donne un type simple d'un twisteur, avec quatre composantes complexes. On propose dans ce chapitre une reformulation spinorielle des applications semi-conformes définies sur un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ , mais aussi sur un ouvert de l'espace de Minkowski  $\mathbb{M}$ , variété semi-riemannienne. Or un spineur est un objet introduit par Elie Cartan [8], dont un cas particulier est le suivant : un couple (2-uplet) de nombres complexes associés à deux vecteurs de l'espace 3D. On obtient une correspondance entre les morphismes harmoniques définis sur un ouvert de l'espace de Minkowski à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , et une paire de champs spinoriels (Théorème 2.2.2)  $(\xi^A, \eta^{A'})$  sur cet ouvert qui vérifie les équations suivantes

$$\begin{cases} \nabla_{AA'} \xi^A \eta^{B'} = 0 \\ \nabla_{AB'} \xi^C \eta^{B'} = 0, \end{cases}$$

où  $\nabla_{AA'}$  est la dérivée covariante définie par la correspondance

$$\nabla_{AA'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \partial_0 + \partial_1 & \partial_2 - i\partial_3 \\ \partial_2 + i\partial_3 & \partial_0 - \partial_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_{00'} & \nabla_{01'} \\ \nabla_{10'} & \nabla_{11'} \end{pmatrix}$$

où  $\partial_i$  est la dérivée partielle par rapport à la  $i$ -ème variable. On va utiliser cette reformulation pour montrer que dans le cas d'un morphisme harmonique  $f$  défini sur un ouvert de l'espace de Minkowski  $\mathbb{M}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , il existe deux champs spinoriels  $\xi_A$  et  $\eta_{A'}$ , qui seront les seules deux directions possibles d'un champ isotrope dans  $\ker df$ . De plus, un de ces deux champs spinoriels est une "congruence de rayons de lumière sans cisaillement (SFR)", c'est-à-dire qu'il forme un feuilletage conforme par des lignes isotropes dans cet ouvert de  $\mathbb{M}$  (Théorème 2.5.1). En effet ce résultat est une généralisation de Baird-Wood [1], qui l'ont démontré mais avec des conditions d'analyticité sur tout objet. On étudie enfin les conditions d'intégrabilité d'une application semi-conforme définie sur un domaine de  $\mathbb{R}^3$ . Or,  $\varphi$  est une application semi-conforme, si et seulement si il existe un champ spinoriel  $\mu_A$ , tel que  $D_{AB}\varphi = \mu_A\mu_B$  et  $D^{C(A}\mu^{B)}\mu_C = 0$ , où

$$D_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \partial_2 - i\partial_3 & -\partial_1 \\ -\partial_1 & -\partial_2 - i\partial_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{00} & D_{01} \\ D_{10} & D_{11} \end{pmatrix}.$$

Tout au long du troisième chapitre, on étudie l'évolution des applications semi-conformes au cours du temps : applications vues comme des champs physiques. On rappelle également la construction de base d'une SFR et l'on montre que les équations qui définissent ces SFR sont équivalentes à celles des évolutions des applications semi-conformes au cours de temps (Proposition 3.1.2). En effet, on montre que le champ spinoriel  $\mu_A$  représente une SFR si et seulement si  $\mu = \mu_0/\mu_1$  vérifie les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \mu\partial_t\mu + \partial_{\bar{q}}\mu + \mu^2\partial_q\mu = 0 \\ \mu\partial_1\mu - \mu^2\partial_q\mu + \partial_{\bar{q}}\mu = 0 \end{cases}$$

où  $q = x_2 + ix_3$ . La première est l'équation d'évolution des applications semi-conformes, tandis que la deuxième est l'équation qui détermine un feuilletage conforme. On donne aussi *une condition pour  $\mu$  de telle sorte que le vecteur  $V = (|\mu|^2 - 1)\partial_1 + 2\mu\partial_q + 2\bar{\mu}\partial_{\bar{q}}$  soit tangent à un feuilletage conforme géodésique* (Proposition 3.1.3), la condition sera donnée par le fait que  $\partial_t\mu = 0$ , c'est-à-dire que son évolution au cours de temps est constante. Pour comprendre géométriquement ces résultats, on définit pour un point  $x \in \mathbb{R}_t^3$  et un champ de vecteurs unitaires  $U_t(x) \in T_x\mathbb{R}_t^3$ , la géodésique isotrope déterminée par  $U_t(x)$  pour être le rayon de lumière passant par  $x$  engendré par le vecteur isotrope  $\partial_t + U_t(x)$ , ainsi trouve-t-on *l'équation d'évolution du vecteur  $U_t(x)$  tangent aux feuilletages d'une application semi-conforme définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}_t^3$*  (Théorème 3.2.1), qui sera donnée par

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\nabla_U^{\mathbb{R}^3} U.$$

On trouve aussi *une équivalente à l'équation fondamentale des applications semi-conformes* [1], cette équation sera donnée par

$$d\varphi_t\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) = -d\varphi_t(\nabla_U U) = \tau(\varphi_t)$$

où  $\tau$  est le champ de tension de  $\varphi$  (Proposition 3.2.1).

Le problème de Cauchy en relativité générale est le suivant : Pour des données initiales sur une variété  $M^3$  de dimension 3, plonger  $M^3$  dans un espace temps  $\mathcal{M}^4$  qui vérifie les équations d'Einstein. Afin que ce problème soit bien posé, on prescrit la première forme fondamentale  $g_{ij}$  et la seconde forme fondamentale  $b_{ij}$  de  $M^3$  dans  $\mathcal{M}^4$ . C'est-à-dire que si  $\mathcal{G}$  est la métrique sur  $\mathcal{M}^4$ , on veut que  $g = \mathcal{G}|_{TM^3}$  et que  $b(X, Y) = \mathcal{G}(-\nabla_X^{\mathcal{G}} n, Y)$ , pour tout  $X, Y \in T_x M^3$  où  $n$  est la normale unitaire à  $M^3$  dans  $\mathcal{M}^4$ , voir [18] pour une discussion.

A la fin du chapitre 3, on considère un problème similaire, mais au lieu de regarder une métrique d'Einstein, on suppose donné un triplet  $(M^3, g_0, U_0)$  d'une variété de dimension 3, munie d'une métrique riemannienne  $g_0$  et un champ de vecteurs  $U_0$  tangent à un feuilletage conforme. Alors, *on essaye de plonger  $(M^3, g_0)$  dans un espace-temps  $(\mathcal{M}^4, \mathcal{G})$  de telle façon que  $g_0$  soit la première forme fondamentale, et que le champ  $U_0$  se prolonge en un champ spatial  $U$  dont les courbes isotropes engendrées par  $U$  sont géodésiques et  $U$  détermine une SFR, c'est-à-dire que  $U$  est tangent à un feuilletage conforme sur des tranches spatiales* (Théorème 3.3.1).

Dans le chapitre quatre, On introduit la notion de *fonction holomorphe sur un graphe*. Une notion d'holomorphie dans un contexte discret a été introduite par Duffin (1968) [11] et par I. Bobenko et C. Mercat (2001) [6] dans le cadre des graphes appelés rhombiques ou quad-graphes, qui sont constitués de faces rhombiques. Cette dernière permet bien de donner une version discrète des équations Cauchy-Riemann en exploitant les quatre sommets de chaque face. Par exemple, pour le graphe  $\mathbb{Z}^2$  dont les sommets sont les points  $(m, n)$  dans le plan (dont deux sommets sont connectés si et seulement si leurs coordonnées diffèrent par 1 dans un et seulement un des coefficients), une fonction  $\phi$  vérifie les équations de Cauchy-Riemann

si et seulement si

$$\phi(m, n+1) - \phi(m+1, n) = i(\phi(m+1, n+1) - \phi(m, n)).$$

On propose une définition qu'on va justifier dans la suite, qui nous paraît tout à fait naturelle et qui est bien définie pour tout graphe.

Soit  $\Gamma = (V, E)$  un graphe, et soit  $\phi : V \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction à valeurs complexes. Alors on dit que  $\phi$  est holomorphe si pour tout  $x \in V$ ,

$$\sum_{y \sim x} (\phi(y) - \phi(x))^2 = 0,$$

où  $x \sim y$  note le fait que  $x$  et  $y$  sont voisins, c'est-à-dire liés par une arête. Cette équation généralise l'équation différentielle dans le plan  $(x, y)$  :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 = 4 \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}\right) = 0$$

ce qui englobe l'holomorphie ou l'anti-holomorphie de  $\phi$ . Mais notons que sur un graphe, en général, on ne possède pas la notion d'orientation pour distinguer entre + holomorphe et - holomorphe. Une des conséquences de notre étude est de montrer la richesse de l'étude de ces fonctions par rapport à la structure combinatoire du graphe. En effet, le problème de classer les graphes finis qui admettent une fonction holomorphe est un problème ouvert très difficile.

Dans le cas continu, une application semi-conforme est une généralisation d'une application conforme dans le plan, qui est évidemment harmonique. Or, une fonction harmonique complexe définie sur un graphe fini est nécessairement constante, ce qui n'est pas vrai dans le cas des fonctions holomorphes. C'est l'un des aspects fascinants de ces objets. Dans le cas continu aussi, on considère une application semi-conforme comme un champ physique, cette application semi-conforme est parfaitement définissable sur un corps fini graphique. On va étudier dans ce chapitre aussi l'évolution, par l'équation de la chaleur, des applications définies sur un graphe. On montre que *l'énergie d'une application définie sur un graphe, diminue sous l'équation de la chaleur* (Proposition 4.1.1). En effet, Soit  $\Gamma = (V, E)$  un graphe fini,  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une famille des fonctions définies sur  $\Gamma$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , vérifiant l'équation de la chaleur  $\frac{\partial f_n}{\partial n} = -\Delta f_n$ , alors

$$\frac{\partial}{\partial n} (df_n, df_n) \leq 0,$$

avec égalité si et seulement si, ou bien  $\Delta f_n = 0$ , ou bien il existe un vecteur constant  $v \in \mathbb{R}^N$  tel que  $\Delta(f_n + v) = 2(f_n + v)$ , c'est-à-dire que, sous l'addition d'une constante, chaque composante de  $f_n$  est un vecteur propre du Laplacien associé à la valeur propre 2 ; et on montre dans le théorème 4.1.1 que *cette famille converge vers une application constante, en particulier, une application harmonique*.

On donne ensuite la notion de la courbure  $K$  sur un graphe fini ; dans ce cas le *théorème de Gauss-Bonnet* prend la forme :  $K(\Gamma) = 2\chi(\Gamma)$ , où  $\chi(\Gamma)$  est la caractéristique d'Euler de  $\Gamma$ . On définit aussi dans ce chapitre *le graphe dual* souvent connu sous le nom de “line graph”. Or, pour un graphe  $\Gamma$  sur lequel on définit une fonction holomorphe  $\varphi : V(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ , où  $V(\Gamma)$  est l'ensemble des sommets de  $\Gamma$ , on peut associer un graphe dual  $L(\Gamma)$ , dont les sommets sont les arêtes du graphe  $\Gamma$ , ainsi qu'une fonction  $\chi : V(T_\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ . La correspondance entre  $\Gamma$  et son dual  $L(\Gamma)$  est l'analogue de la correspondance twistorielle de Penrose entre un rayon de lumière et un twisteur.

# Chapitre 1

## Variétés riemanniennes, applications semi-conformes

Dans ce premier chapitre, on présente les notions de base : variété riemannienne, semi-riemannienne, application semi-conforme, application harmonique et biharmonique, en démontrant certains nouveaux résultats qui seront utiles par la suite, notamment une loi de conservation pour les applications semi-conformes et une caractérisation des applications biharmoniques semi-conformes dont les fibres sont des arcs de cercles. Ces derniers exemples fournissent des champs physiques sur l'espace temps qui seront discrets plus tard dans la thèse.

On introduit aussi le concept de graphe ou de réseau, objet de base lorsqu'on discutera des champs combinatoires dans le quatrième chapitre. La notion d'application semi-conforme entre graphes a été proposée par H.Urakawa en 2000 [25]. On introduit finalement notre propre définition de fonction holomorphe sur un graphe, uniquement en terme de propriétés combinatoires des graphes.

### 1.1 Variétés riemanniennes et semi-riemanniennes

Une variété riemannienne est une variété différentielle ayant une structure supplémentaire permettant de définir la longueur d'un chemin entre deux points de la variété.

**Définition 1.1.1.** *Une variété riemannienne de classe  $C^\infty$  est un couple  $(M^n, g)$  où  $M^n$  est une variété de classe  $C^\infty$  et  $g$  une métrique riemannienne  $C^\infty$ , c'est-à-dire que pour chaque  $x \in M$ ,  $g_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$  est symétrique et définie positive et dépend que de façon  $C^\infty$  sur  $x$ .*

Une variété semi-riemannienne, aussi appelée variété pseudo-riemannienne, est une généralisation d'une variété riemannienne. La seule différence avec la variété riemannienne, est le fait que la métrique n'est plus une métrique définie positive.

**Définition 1.1.2.** *Une variété semi-riemannienne de classe  $C^\infty$  est un couple  $(M^n, g)$  où  $M^n$  est une variété de classe  $C^\infty$  et  $g$  est une métrique semi-riemannienne. Il s'agit alors*

d'une métrique  $g$  qui est une section  $C^\infty$  de  $\odot^2 T^*M$ , définissant un produit scalaire non dégénéré de signature constante  $(p,q)$  sur chaque espace tangent ( $q=n-p$ ).

**Remarque 1.1.1.** Une métrique semi-riemannienne de signature  $(0,n)$  n'est qu'une métrique riemannienne.

Si  $M^n$  est munie d'un système de coordonnées  $(x^i)$ , alors une métrique riemannienne ou semi-riemannienne  $g$  s'exprime comme

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$$

où  $g_{ij}$  sont des fonctions  $C^\infty$  et  $dx^i dx^j = \frac{1}{2}(dx^i \otimes dx^j + dx^j \otimes dx^i)$ .

L'espace de Minkowski est un exemple d'une variété semi-riemannienne que l'on va utiliser dans la suite de la thèse.

**Exemple 1.1.1.** L'espace de Minkowski (appelé aussi espace temps de Minkowski) est l'espace  $\mathbb{R}^4$  souvent noté par  $\mathbb{M}^4$  ou tout simplement  $\mathbb{M}$ , muni d'une métrique standard de signature  $(1,3)$  définie par

$$g = -dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2.$$

Un référentiel de l'espace de Minkowski est un référentiel galiléen pour un observateur : choix d'un lieu et moment de référence, choix d'axes tridimensionnels et d'un temps. Un observateur, et son référentiel, étant plongé dans cet espace, il repère un événement (point de l'espace-temps) par ses coordonnées temporelles  $t$  et spatiales  $(x; y; z)$ .

Dans la suite,  $x = (t, x_1, x_2, x_3)$  désigne un élément de l'espace de Minkowski  $\mathbb{M}$ , et on note par  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  le produit scalaire déterminé par  $g$  :

$$\langle v, w \rangle_1 = -v_0 w_0 + v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

pour chaque  $v = \sum_{i=0}^3 v_i (\frac{\partial}{\partial x_i})$  et  $w = \sum_{i=0}^3 w_i (\frac{\partial}{\partial x_i}) \in T_x \mathbb{M}$ .

Une connexion sur une variété nous donne le moyen de dériver un champ de vecteurs (ou plus généralement, une section d'un fibré) par rapport à un vecteur en chaque point. Sur une variété riemannienne ou semi-riemannienne  $(M, g)$ , on définit la connexion de Levi-Civita comme la connexion unique  $\nabla$  qui est sans torsion :  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$  pour tout  $X, Y \in C^\infty(TM)$ , et qui est métrique :  $\nabla g = 0$ . Explicitement, pour chaque  $x \in M$ ,  $\nabla : T_x M \times C^\infty(TM) \rightarrow T_x M$  et pour  $X \in T_x M$ ,  $Y, Z \in C^\infty(TM)$  on a

$$Z(g(X, Y)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

En termes des coordonnées locales  $x^i$ , la connexion est caractérisée par les symboles de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k};$$

pour la connexion de Levi-Civita :  $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})$ , où  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ .

A partir de la connexion  $\nabla$ , on définit le tenseur de courbure  $R$ , qui en chaque point  $x \in M$ , détermine une application multilinéaire  $R_x : T_x M \times T_x M \times T_x M \rightarrow T_x M$  définie par :

$$R_x(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

En coordonnées locales, en écrivant  $R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_l R_{ijk}^l \partial_l$ , on a la formule suivante :

$$R_{ijk}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l.$$

La courbure de Ricci, est le tenseur symétrique donné par la trace de  $R$  :

$$Ricci(X, Y) = \sum_i g(R(e_i, X)Y, e_i)$$

où  $(e_i)$  est une base orthonormée de  $T_x M$  en chaque  $x \in M$  ; et la courbure scalaire  $S$  est la trace de la courbure de Ricci :

$$S = \sum_i Ricci(e_i, e_i).$$

Deux métriques  $g$  et  $\tilde{g}$  sont conformément équivalentes (on dit aussi que  $\tilde{g}$  est une déformation conforme de la métrique  $g$ ), s'il existe une fonction  $C^\infty$ ,  $a : M \rightarrow \mathbb{R}$  ( $> 0$ ) telle que  $\tilde{g} = a^2 g$ . On peut alors calculer les nouveaux symboles de Christoffel

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \partial_i \ln a \delta_j^k + \partial_j \ln a \delta_i^k - g_{ij} \sum_l g^{kl} \partial_l \ln a$$

qui déterminent les transformées de différentes courbures par une déformation conforme. Dans cette thèse on est particulièrement concerné par des équations ou des intégrales qui sont invariantes par une déformation conforme.

Dans une variété riemannienne ou semi-riemannienne  $(M, g)$  munie de sa connexion de Levi-Civita  $\nabla^M$ , une géodésique est une courbe  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ , qu'on suppose de classe  $C^\infty$ , vérifiant

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\gamma^{-1}} \gamma'(t) = \nabla_{\gamma'(t)}^M \gamma'(t) = u(t) \gamma'(t)$$

pour chaque  $t \in [a, b]$  et pour une fonction  $u(t)$ , où  $\nabla^{\gamma^{-1}}$  est la connexion du fibré pull-back  $\gamma^{-1}TM$ , et où afin de définir la dérivée covariante  $\nabla_{\gamma'} \gamma'$ , on prolonge  $\gamma'$  dans un voisinage de  $\gamma$  ; le résultat est indépendant de ce prolongement.

Dans une variété riemannienne, une géodésique est un point critique de la fonctionnelle de longueur :  $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt$ . Cette fonctionnelle est indépendante de la paramétrisation de  $\gamma$ . Si  $\gamma$  est une courbe régulière ( $\gamma'(t) \neq 0$  pour tout  $t$ ), on peut reparamétriser  $\gamma$  par rapport à l'abscisse curviligne :  $S(t) = \int_a^t |\gamma'(t)| dt$ . Par rapport à cette paramétrisation,  $\gamma$  est géodésique si et seulement si

$$\nabla_{\gamma'(s)} \gamma'(s) = 0.$$



Dans une variété semi-riemannienne  $(M, g)$ , une courbe  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  s'appelle isotrope si son vecteur  $\gamma'(t)$  vérifie

$$g(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 0,$$

pour tout  $t \in [a, b]$ . La définition d'une géodésique donnée ci-dessus s'applique aussi bien aux courbes isotropes. Dans un espace  $(M, g)$  de signature  $(1, 3)$ , une géodésique isotrope s'appelle un rayon de lumière.

Soit  $(M, g) = \mathbb{M}$  l'espace de Minkowski, alors une courbe isotrope  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{M}$  est dirigée vers le futur si

$$g\left(\frac{\partial}{\partial t}, \gamma'(u)\right) > 0$$

pour tout  $u \in [a, b]$ . En ce cas il existe une paramétrisation  $\gamma = \gamma(s)$  telle que

$$\gamma'(s) = \frac{\partial}{\partial t} + u(s)$$

où  $u(s)$  est un vecteur spatial ( $g(\frac{\partial}{\partial t}, u(s)) = 0$ ) vérifiant  $g(u(s), u(s)) = 1$  pour tout  $s$ . Alors  $u(s)$  représente la direction de la courbe dans la sphère céleste.

## 1.2 Applications semi-conformes

### 1.2.1 Définition

Soient  $(M^m, g)$  et  $(N^n, h)$  deux variétés riemanniennes. Pour tout  $x \in M$ , on définit les deux espaces, vertical et horizontal de  $\phi$  en  $x$ , respectivement par  $\mathcal{V}_x = \ker d\phi_x$  et  $\mathcal{H}_x = \mathcal{V}_x^\perp$  comme complément orthogonal de  $\mathcal{V}_x$ . L'espace tangent au point  $x \in M$  se décompose alors de la façon suivante :  $T_x M = \mathcal{H}_x \oplus \mathcal{V}_x$ .

Dans la suite on suppose que  $m \geq n$ .

**Définition 1.2.1.** Soit  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$  une application  $\mathbb{C}^\infty$  entre deux variétés riemanniennes, et  $x \in M$ . On dit que  $\varphi$  est semi-conforme en  $x$  si

1. ou bien  $d\varphi_x = 0$  (c'est-à-dire que  $x$  est un point singulier).
2. ou bien  $d\varphi_x$  est surjective et il existe  $\Lambda(x) \neq 0$ , tel que

$$h(d\varphi_x(X), d\varphi_x(Y)) = \Lambda(x)g(X, Y),$$

où  $X$  et  $Y$  sont deux vecteurs horizontaux dans  $(\ker d\varphi_x)^\perp$ . Si  $\varphi$  est semi-conforme en tout point  $x \in M$ , on dit que  $\varphi$  est semi-conforme. De plus, si tous les points de  $M$  sont réguliers, on dit que  $\varphi$  est une submersion semi-conforme.

Cette définition s'adapte dans le cas des applications semi-conformes entre les variétés semi-riemanniennes, sauf que dans ce cas là,  $\Lambda(x)$  peut prendre des valeurs négatives [14].

En posant  $\Lambda(x) = 0$  si  $x$  est un point singulier, on obtient une fonction  $\Lambda : M \rightarrow \mathbb{R}(\geq 0)$  définie par :

$$\Lambda(x) = \frac{1}{n} |d\varphi_x|^2$$

où  $|d\varphi_x|$  est la norme de Hilbert-Schmidt définie par :

$$|d\varphi_x|^2 = \sum_{i=1}^m h(d\varphi_x(e_i), d\varphi_x(e_i)),$$

où  $\{e_i\}$  est une base orthonormale de  $T_x M$ . La fonction  $\Lambda$  est alors lisse sur  $M$ , même aux points critiques. Dans le cas où  $M$  est une variété riemannienne,  $\Lambda \geq 0$  et sa racine carrée  $\lambda = \sqrt{\Lambda}$  est appelée la *dilatation* de l'application  $\varphi$ . On munit  $(M^n, g)$  et  $(N^n, h)$  de coordonnées locales  $(x^i)$  et  $(y^\alpha)$  de telle sorte que  $g = g_{ij} dx^i dx^j$  et  $h = h_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta$ , où ici et dans la suite, on somme sur les indices répétés (sommation d'Einstein). On écrit  $\varphi^\alpha = y^\alpha \circ \varphi$  et  $\varphi_i^\alpha = (\partial \varphi^\alpha) / (\partial x^i)$ . Alors, dans ces coordonnées locales,

$$|d\varphi_x|^2 = g^{ij} \varphi_i^\alpha \varphi_j^\beta h_{\alpha\beta}.$$

On définit le pull-back  $\varphi^* h$  de la métrique  $h$  par :

$$\varphi^* h(E, F) = h(d\varphi_x(E), d\varphi_x(F)) \quad (E, F \in T_x M).$$

Alors on a

$$|d\varphi_x|^2 = \text{Tr}_g \varphi^* h = \sum_{i=1}^m \varphi^* h(e_i, e_i).$$

Le tenseur  $\varphi^* h$  est symétrique et semi-définie positive en chaque point  $x \in M$ , alors ses valeurs propres sont positives ou nulles, et on les note par  $\lambda_1^2, \dots, \lambda_m^2$ , pour des  $\lambda_i \geq 0$  mais non nécessairement distinctes. On suppose que les  $\{f_i\}_{i=1, \dots, m}$  sont les vecteurs propres correspondants, qui forment une base orthonormée, alors

$$\varphi^* h(f_i, f_j) = h(d\varphi_x(f_i), d\varphi_x(f_j)) = \delta_{ij} \lambda_i^2.$$

Ce qui montre enfin que

$$|d\varphi_x|^2 = \sum_{i=1}^m \lambda_i^2.$$

Soit  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$  une application semi-conforme entre deux variétés riemanniennes et soit  $x \in M$ , alors

$$(1.1) \quad g^{ij} \varphi_i^\alpha \varphi_j^\beta = \lambda(x)^2 h^{\alpha\beta}$$

où  $\lambda$  est la dilatation de l'application  $\varphi$ . Notons que la composée de deux applications semi-conformes est semi-conforme.

**Exemple 1.2.1.** Les applications de Hopf :  $\mathcal{S}^3 \rightarrow \mathcal{S}^2$ ,  $\mathcal{S}^7 \rightarrow \mathcal{S}^4$ ,  $\mathcal{S}^{15} \rightarrow \mathcal{S}^8$ ,  $\mathcal{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CP}^{n+1}$ ,  $\mathcal{S}^{4n+1} \rightarrow \mathbb{HP}^n$  sont toutes des submersions semi-conformes de dilatation constante.

**Exemple 1.2.2.** La projection radiale : pour tout  $m \in \{1, 2, \dots\}$ , l'application

$$\mathbb{R}^m \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{S}^{m-1}, \quad x \rightarrow x/|x|$$

est une submersion semi-conforme de dilatation  $\lambda(x) = 1/|x|$ .

Plus tard, on verra que ces exemples sont des morphismes harmoniques.

**Exemple 1.2.3.** Soit  $\varphi : S^3 \rightarrow S^2$  l'application définie par :

$$\varphi(\cos(s)e^{i\alpha}, \sin(s)e^{i\beta}) = (\cos \alpha(s), \sin \alpha(s)e^{i(k\alpha+l\beta)})$$

où l'on considère

$$\begin{aligned} S^3 &= \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 : |w|^2 + |z|^2 = 1\} \\ &= \{(\cos(s)e^{i\alpha}, \sin(s)e^{i\beta}) : s \in [0, \pi/2], \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

et où  $\alpha : [0, \pi/2] \rightarrow [0, \pi]$  vérifie  $\alpha(0) = 0$ ,  $\alpha(\pi/2) = \pi$ . Lorsque  $(k, l) = (\pm 1, 1)$  et  $\alpha(s) = 2s$ ,  $\varphi$  est isométrique à la fibration de Hopf.

Par l'équation (1.1),  $\varphi$  est semi-conforme si et seulement si

$$\alpha'(s) = \frac{\sin \alpha(s) \sqrt{k^2 \sin^2(s) + l^2 \cos^2(s)}}{\sin(s) \cos(s)}.$$

On peut intégrer cette équation explicitement, en vérifiant les conditions de bord : si  $k = l$ , on obtient

$$\alpha(s) = 2 \arctan(C \tan^k(s))$$

pour une constante arbitraire  $C > 0$  ; si  $l > k > 0$ , on obtient

$$\alpha(s) = 2 \arctan \left\{ C \frac{\{l \operatorname{cosec}(s) - \sqrt{l^2 \cot^2 s + k^2}\}^l}{\{\sqrt{k^2 \tan^2 s + l^2} - k \sec(s)\}^k} \right\}$$

pour une constante arbitraire  $C > 0$ . Si  $|k| \neq |l|$ , alors cette application est semi-conforme non-harmonique (car les fibres ne sont pas géodésiques ; voir la section 1.4.1 ci-dessous).

**Cas particulier :**

Les fonctions définies sur une variété riemannienne  $(M^n, g)$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

Dans ce cas,  $\phi$  peut s'écrire sous la forme  $\phi = f + ih$  où  $f$  et  $h$  sont deux fonctions à valeurs réelles.

La propriété suivante découle facilement de la caractérisation des applications semi-conformes.

**Proposition 1.2.1.** Soit  $\phi : (M^n, g) \rightarrow \mathbb{C}$  une application lisse, alors  $\phi$  est semi-conforme si et seulement si

$$\sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = 0.$$

En d'autres termes, si et seulement si

$$\langle \nabla f, \nabla h \rangle = 0 \text{ et } |\nabla f| = |\nabla h|.$$

Si c'est le cas,  $\lambda$  sera donnée par

$$\lambda^2 = |\nabla f|^2 = |\nabla h|^2$$

**Exemple 1.2.4.** Application de Hopf. Soit l'application :

$$H : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sigma^{-1}} S^3 \xrightarrow{\pi} S^2 \xrightarrow{\sigma} \mathbb{R}^2$$

où  $\sigma$  désigne la projection stéréographique de  $S^n$  dans  $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  et  $\sigma^{-1}$  son inverse,  $\pi$  est la fibration de Hopf de  $S^3$  dans  $S^2$  qui est donnée par :

$$\pi(z, w) = (|z|^2 - |w|^2, 2\bar{z}w), \quad z, w \in \mathbb{C}, |z|^2 + |w|^2 = 1.$$

Alors, explicitement  $H$  est donnée par

$$(1.2) \quad H(x_1, x_2, x_3) = \frac{(1 - \frac{|x|^2}{2})x_2 + \sqrt{2}x_1x_3}{x_2^2 + x_3^2} + i \frac{(1 - \frac{|x|^2}{2})x_3 - \sqrt{2}x_1x_2}{x_2^2 + x_3^2}.$$

Donc, on a

$$f = \frac{(1 - \frac{|x|^2}{2})x_2 + \sqrt{2}x_1x_3}{x_2^2 + x_3^2}, \quad h = \frac{(1 - \frac{|x|^2}{2})x_3 - \sqrt{2}x_1x_2}{x_2^2 + x_3^2}.$$

C'est un exemple d'une application semi-conforme puisque

$$\langle \nabla f, \nabla h \rangle = 0 \text{ et } |\nabla f| = |\nabla g|.$$

Sinon, elle est la composée d'applications semi-conformes. Par conséquent, on peut calculer la dilatation

$$\lambda^2 = |\nabla f|^2 = \frac{(1 + \frac{|x|^2}{2})^2}{(x_2^2 + x_3^2)^2} = \frac{2 + f^2 + h^2}{x_2^2 + x_3^2}$$

Remarquablement, cet exemple est aussi biharmonique et on y reviendra dans la partie 1.4.2.

## 1.2.2 Formulation variationnelle

Dans le chapitre 3 et 4, nous adoptons la perspective qu'une application semi-conforme à valeurs dans une surface est un potentiel pour un champ physique. Il est alors important de savoir que ces objets sont minimisantes pour une certaine fonctionnelle; ce que nous démontrons dans ce paragraphe.

**Lemme 1.2.1.** Soit  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$  une application  $C^\infty$  entre deux variétés riemanniennes, alors :  $\varphi$  est semi-conforme si et seulement si pour tout  $x \in M$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\lambda_i^2(x) = \lambda^2(x)$ , où  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de  $\varphi^*h$ , et  $\lambda$  la dilatation de  $\varphi$ .

**Preuve** Il suffit de remarquer que  $\varphi^*h(e_i, e_j) = \delta_{ij}\lambda_i^2$ , et que l'application  $\varphi$  est semi-conforme si et seulement si

$$(\varphi^*h)_x / \mathcal{H}_x \times \mathcal{H}_x = \lambda^2(x) g_x / \mathcal{H}_x \times \mathcal{H}_x,$$

où  $\lambda$  est le facteur de semi-conformalité. □

Supposons maintenant que la dimension du codomaine  $N$  est 2, donc  $\varphi^*h$  a deux valeurs propres non nulles. Dans ce cas, la densité d'énergie est donnée par

$$e_\varphi(x) = \frac{1}{2}|d\varphi_x|^2 = \frac{1}{2}(\lambda_1^2(x) + \lambda_2^2(x)).$$

et le jacobien

$$\begin{aligned} j_\varphi(x) &= \sqrt{\det(d\varphi \circ d\varphi^*)} \\ &= \sqrt{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \\ &= \lambda_1 \lambda_2. \end{aligned}$$

On remarque alors que  $e_\varphi - j_\varphi \geq 0$  avec égalité si et seulement si  $\varphi$  est semi-conforme.

**Proposition 1.2.2.** *Soit  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^2, h)$  une application entre deux variétés riemanniennes,  $M$  compacte, alors*

$$I(\varphi) = \int_M (e_\varphi - j_\varphi)^{m/2} dv_g$$

*est une intégrale invariante par une déformation conforme de la métrique de départ. En générale,  $I(\varphi) \geq 0$ , avec égalité si et seulement si  $\varphi$  est semi-conforme.*

**Preuve** Soit  $\tilde{g} = a^2 g$  une déformation conforme de la métrique  $g$ . Or  $dv_g = \sqrt{\det g} dx^1 \dots dx^m$ , alors

$$\begin{aligned} dv_{\tilde{g}} &= \sqrt{\det \tilde{g}} dx^1 \dots dx^m \\ &= \sqrt{a^{2m} \det g} dx^1 \dots dx^m \\ &= a^m dv_g. \end{aligned}$$

Soit  $f_1, f_2$  deux vecteurs propres associés aux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Alors on a :

$$\begin{aligned} \lambda_i^2 g(f_i, \cdot) &= \varphi^* h(f_i, \cdot) \\ \tilde{\lambda}_i^2 \tilde{g}(f_i, \cdot) &= \varphi^* h(f_i, \cdot) \\ &\text{pour } i=1,2, \end{aligned}$$

ce qui revient à dire que

$$\tilde{\lambda}_i^2 a^2 g(f_i, \cdot) = \varphi^* h(f_i, \cdot) \quad (i = 1, 2).$$

Par l'unicité d'une valeur propre, on en déduit que  $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i/a$ , ce qui montre que  $\tilde{e}_\varphi = a^{-2}e_\varphi$  et  $\tilde{j}_\varphi = a^{-2}j_\varphi$ . Maintenant on calcule :

$$\begin{aligned}
I(\varphi, \tilde{g}) &= \int_M (\tilde{e}_\varphi - \tilde{j}_\varphi)^{m/2} dv_{\tilde{g}} \\
&= \int_M (a^{-2}e_\varphi - a^{-2}j_\varphi)^{m/2} a^m dv_g \\
&= \int_M a^{-m} (e_\varphi - j_\varphi) a^m dv_g \\
&= \int_M (e_\varphi - j_\varphi) dv_g \\
&= I(\varphi, g).
\end{aligned}$$

□

Etant donné une classe d'homotopie  $[\varphi] \in \mathcal{C}(M^m, N^2)$  ( $M^m$  et  $N^2$  sont munies de métriques riemanniennes), il est inconnu en général si  $[\varphi]$  contient un représentant semi-conforme, c'est-à-dire que si la fonctionnelle  $I$  atteint le minimum 0 dans  $[\varphi]$ . L'exemple 1.2.3 montre que c'est le cas pour les classes d'homotopies  $\pi_3(S^2) = \mathcal{C}(S^3, S^2) \cong \mathbb{Z}$  qui sont paramétrées par l'entier  $kl$  (l'invariant de Hopf), où l'on suppose  $S^3, S^2$  munies de leurs métriques canoniques. Pourtant, si  $M^3$  est une variété hyperbolique (à courbure constante négative) compacte sans bord, il est connu qu'il n'existe pas d'application semi-conforme harmonique non-constante de  $M^3$  dans  $N^2$  [1]. Il serait intéressant de savoir si, dans ce cas, il existe une application semi-conforme non-constante.

### 1.2.3 Les coordonnées canoniques d'une application semi-conforme

Dans ce paragraphe, on cherche à caractériser localement la métrique de départ  $g$  d'une application semi-conforme définie sur une variété de dimension  $m$ , et à valeurs dans une autre variété de dimension  $n$ , tel que  $m \geq n$ .

**Théorème 1.2.1.** *Soit  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  la projection :*

$$\varphi(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^n) \quad (m \geq n).$$

*Soit  $h = h_{ij} dy^i dy^j$  une métrique riemannienne sur  $\mathbb{R}^n$ . Alors dans le cas où  $\varphi$  est semi-conforme, la métrique  $g$  sera donnée par*

$$(g_{ab}) = \begin{pmatrix} \frac{h_{ij}}{\lambda^2} + A^{rs} f_{ir} f_{js} & \alpha f_{ir} \\ \alpha f_{js} & a_{rs} \end{pmatrix}$$

*avec  $a, b = 1, \dots, m$ ;  $i, j = 1, \dots, n$ ;  $r, s = n + 1, \dots, m$ ;  $\alpha^2 = \det(a_{rs})$ ;  $A^{rs} = \alpha^2 a^{rs}$  et  $(a^{rs}) = (a_{rs})^{-1}$ .*

**Preuve** Soit  $a_{rs} = g_{rs}$  et  $f_{ir} = g_{ir}/\alpha$ . Puisque l'application  $\varphi$  est semi-conforme, alors, d'après l'équation (1.1) :

$$g^{ab}\varphi_a^i\varphi_b^j = \lambda^2 h^{ij} \Rightarrow g^{ij} = \lambda^2 h^{ij} \quad (\varphi_a^i = \delta_a^i).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} g^{ij} = \lambda^2 h^{ij} &\Rightarrow g^{ij}h_{jk} = \lambda^2 h^{ij}h_{jk} = \lambda^2 \delta_k^i \\ &\Rightarrow g_{ai}g^{ij}h_{jk} = \lambda^2 \delta_k^i g_{ai} = \lambda^2 g_{ak} \\ &\Rightarrow g_{ab}g^{bj}h_{jk} - g_{ar}g^{rj}h_{jk} = \lambda^2 g_{ak} \\ &\Rightarrow \delta_a^j h_{jk} - g_{ar}g^{rj}h_{jk} = \lambda^2 g_{ak} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1.3) \quad \text{Pour } a = i : \quad &h_{ik} - g_{ir}g^{rj}h_{jk} = \lambda^2 g_{ik} \\ \text{Pour } a = s : \quad &-g_{sr}g^{rj}h_{jk} = \lambda^2 g_{sk}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} &-a_{rs}g^{sj}h_{jk} = \lambda^2 g_{kr} \\ &\Rightarrow -a^{tr}a_{rs}g^{sj}h_{jk} = \lambda^2 g_{kr}a^{rt} \\ (1.4) \quad &\Rightarrow -g^{tj}h_{jk} = \lambda^2 g_{kr}a^{rt}. \end{aligned}$$

Finalement, les deux équations (1.3) et (1.4) montrent que

$$\begin{aligned} g_{ij} &= h_{ij}/\lambda^2 - 1/\lambda^2 g_{ir}g^{rk}h_{kj} \\ &= h_{ij}/\lambda^2 - 1/\lambda^2 g_{ir}(-\lambda^2 g_{js})a^{rs} \\ &= h_{ij}/\lambda^2 + a^{rs}g_{ir}g_{js} = h_{ij}\lambda^2 + \alpha^2 a^{rs}f_{ir}f_{js}. \end{aligned}$$

□

**Remarque 1.2.1.** Une autre écriture pour la métrique  $g$

$$(g_{ab}) = \begin{pmatrix} \frac{h_{ij}}{\lambda^2} + a^{rs}\alpha f_{ir}\alpha f_{js} & \alpha f_{ir} \\ \alpha f_{js} & a_{rs} \end{pmatrix},$$

se déduit en écrivant  $e_{ir} = \alpha f_{ir}$  ; on obtient alors

$$(1.5) \quad (g_{ab}) = \begin{pmatrix} \frac{h_{ij}}{\lambda^2} + a^{rs}e_{ir}e_{js} & e_{ir} \\ e_{js} & a_{rs} \end{pmatrix}$$

Nous étudierons un cas special lorsque  $m = n + 1$  dans le paragraphe 1.3.1.

### 1.2.4 Feuilletages conformes

Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage  $C^\infty$  d'une variété riemannienne  $(M^m, g)$  de codimension  $n$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{F}$  détermine une décomposition de  $M$  en sous-ensembles connexes  $\{L_\alpha\}$  (les feuilles), tel que pour chaque  $x \in M$ , il existe un voisinage  $W$  de  $x$  et une submersion  $\varphi : W \rightarrow N^n$  à valeurs dans une variété de dimension  $n$ , telle que les fibres de  $\varphi$  correspondent aux composantes connexes de  $W \cap L_\alpha$ . L'application  $\varphi$  est appelée une submersion distinguée par rapport à  $\mathcal{F}$ . Notons que les feuilles  $L_\alpha$  déterminent une décomposition  $T_x M = \mathcal{H}_x \oplus \mathcal{V}_x$  en chaque point, où  $\mathcal{V}_x$  est tangent aux feuilles et  $\mathcal{H}_x = \mathcal{V}_x^\perp$ . Alors,  $\mathcal{F}$  est dite conforme (ou parfois transversalement conforme) si pour tout  $x \in M$ ,  $V \in \mathcal{V}_x$ ,  $X, Y \in \mathcal{H}_x$  :

$$(\mathcal{L}_V g)(X, Y) = a(V)g(X, Y)$$

où  $a$  est une fonction qui ne dépend que de  $x$  et de  $V$ .

Le lien entre les feuilletages conformes et les applications semi-conformes est donné par le résultat suivant :

**Théorème 1.2.2.** [1] Soit  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$  une submersion semi-conforme. Alors les fibres de  $\varphi$  déterminent un feuilletage conforme de  $M^m$ . Réciproquement, si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage conforme de  $(M^m, g)$ , alors pour tout  $x \in M$ , il existe un voisinage  $W$  de  $x$ , une submersion distinguée  $\varphi : W \rightarrow N^n$  et une métrique  $h$  sur  $N^n$  par rapport à laquelle  $\varphi : (W, g/W) \rightarrow (N^n, h)$  est semi-conforme.

Dans le cas où le feuilletage conforme  $\mathcal{F}$  est de dimension 1, on peut démontrer facilement que

$$(1.6) \quad (\mathcal{L}_V g(X, Y)) = -2V(\ln \lambda)g(X, Y) \quad (V \in \mathcal{V}_x, X, Y \in \mathcal{H}_x)$$

où  $\lambda$  est la dilatation associée à la submersion distinguée dans le théorème précédent.

Le lemme suivant est utile pour les calculs.

**Lemme 1.2.2.** Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage  $C^\infty$  d'une variété riemannienne  $(M^m, g)$ . Alors  $\mathcal{F}$  est conforme si et seulement si la distribution orthogonale  $\mathcal{H}$  est ambilique, c'est-à-dire

$$g(V, \mathcal{B}^{\mathcal{H}}(X, Y)) = \alpha(V)g(X, Y)$$

pour une fonction  $\alpha$  ne dépends que de  $\mathcal{H}$  et de  $V$ , où  $\mathcal{B}^{\mathcal{H}}(X, Y) = \frac{1}{2}(\nabla_X Y + \nabla_Y X)^\perp$  est la seconde forme fondamentale de la distribution  $\mathcal{H}$ . En particulier, si  $\mathcal{H}$  est intégrable, alors  $\mathcal{F}$  est conforme si et seulement si les sous-variétés intégrables de  $\mathcal{H}$  sont des sous-variétés ambiliques.

**Preuve** Il suffit de noter que

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_V g)(X, Y) &= V(g(X, Y)) - g(\mathcal{L}_V X, Y) - g(X, \mathcal{L}_V Y) \\ &= g(\nabla_V X, Y) + g(X, \nabla_V Y) - g(\nabla_V X - \nabla_X V, Y) - g(X, \nabla_V Y - \nabla_Y V) \\ &= g(\nabla_X V, Y) + g(X, \nabla_Y V) \\ &= -g(V, \nabla_X Y + \nabla_Y X). \end{aligned}$$



□

Alors, si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage de dimension 1 d'une variété  $M^3$  de dimension 3, en supposant  $X, Y$  orthonormés, on remarque que  $\mathcal{F}$  est conforme si et seulement si

$$g(V, \nabla_X X) = g(V, \nabla_Y Y) \text{ et } g(V, \nabla_X Y + \nabla_Y X) = 0.$$

En écrivant  $Z = X - iY$  et en prolongant  $g$  au fibré tangent complexifié  $T^{\mathbb{C}}M^3$  par linéarité, on voit que  $\mathcal{F}$  est conforme si et seulement si

$$g(V, \nabla_Z Z) = 0.$$

Cette équation sera utile pour le chapitre 3.

Le lemme nous permet aussi de construire de nombreux exemples de feuilletages conformes. Par exemple, supposons  $M^3 = \mathbb{R}^3$  munie de sa métrique canonique et soit  $\gamma$  une courbe  $C^\infty$  dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $x \in \gamma$ . Dans un voisinage  $A$  de  $x$ , on peut construire une famille de surfaces ambiliques (par exemple des plans) orthogonales à  $\gamma$  et si  $A$  est assez petit, ces surfaces seront disjointes dans  $A$ . Soit  $U$  le champ de vecteurs unitaires orthogonal aux surfaces. Alors, par le lemme 1.2.2,  $U$  est tangent à un feuilletage conforme dont une des feuilles est la courbe  $\gamma \cap A$ .

## 1.3 Applications semi-conformes avec fibres de dimension 1

Le cas où  $\varphi : (M^{m+1}, g) \rightarrow (N^n, h)$  est une submersion semi-conforme entre variétés orientées avec fibres de dimension 1 est spécial, car les fibres déterminent un champ de vecteurs unitaires avec des propriétés qu'on va exploiter dans la suite. Une conséquence particulièrement intéressante est l'existence d'une intégrale sur une hypersurface invariante par déformation conforme qui détecte les singularités encloses à l'intérieur.

### 1.3.1 Coordonnées canoniques avec fibres de dimension 1

Dans la thèse, on s'intéresse à des applications semi-conformes définies sur un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  à valeurs dans une surface. Alors, en appliquant le théorème 1 dans le cas où  $m = 3$ ,  $n = 2$ , on retrouve le résultat pour les coordonnées canoniques d'une application semi-conforme définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  à valeurs dans une surface.

**Lemme 1.3.1.** *Soit  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la projection :*

$$\varphi(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^2).$$

*Soit  $h = h_{ij}dy^i dy^j$  une métrique sur  $\mathbb{R}^2$ . Alors, dans le cas où  $\varphi$  est semi-conforme, la métrique  $g$  sera donnée par :*

$$(g_{ab}) = \begin{pmatrix} \frac{h_{ij}}{\lambda^2} + f_i f_j & a f_i \\ a f_j & a^2 \end{pmatrix}$$

$i, j = 1, 2$ .

**Preuve** Il suffit d'utiliser la métrique  $g$  donnée par l'équation (1.5) pour  $e_i = a f_i$  et  $a_{rs} = a^2$ .  
□

**Lemme 1.3.2.** Soit  $\varphi : (M^3, g) \rightarrow (N^3, h)$  une application semi-conforme, avec dilatation  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ , alors

$$g = \frac{\varphi^* h}{\lambda^2} + \theta^2$$

où  $\theta$  est une 1-forme non nulle sur  $\ker d\varphi$ ; en terme de coordonnées canoniques,  $\theta = f_1 dx^1 + f_2 dx^2 + a dx^3$ .

**Preuve**  $\varphi$  est semi-conforme si et seulement si pour tout  $X, Y \in \mathcal{H}_x = (\ker d\varphi_x)^\perp$ , on a :

$$\lambda^2 g(X, Y) = \varphi^* h(X, Y).$$

Soit  $\theta = g(U, \cdot)$  où  $U \in \ker d\varphi_x$  est telle que  $g(U, U) = 1$ , alors :

$$g = \frac{\varphi^* h}{\lambda^2} + \theta^2.$$

L'expression en terme de coordonnées canoniques est fournie par le lemme 1.3.1. □

### 1.3.2 Feuilletages conformes par des cercles dans $\mathbb{R}^3$

Ce paragraphe sera également utile pour donner une représentation des applications biharmoniques semi-conformes, qui ont des cercles comme fibres. Dans l'annexe, on verra comment cette représentation peut être appliquée pour obtenir une formule intégrale d'une classe d'applications biharmoniques (non semi-conformes).

Soit  $\mathcal{C}$  un cercle orienté dans  $\mathbb{R}^3$ , de centre  $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ , de rayon  $r$  et de direction normale  $n = (n_1, n_2, n_3)$  avec  $|n| = r$ . La direction normale  $n$  est choisie de sorte que  $\{X, Y, n/|n|\}$  forme un repère orthonormé après avoir choisi deux vecteurs orthonormaux  $X$  et  $Y$  dans le plan de ce cercle.

Alors, l'équation de ce cercle est donnée par :

$$|x|^2 + 2\xi \cdot x + \xi^2 = 0,$$

où  $\xi_j = -a_j + i n_j$  pour  $j = 1, 2, 3$ .

Soit  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  une application semi-conforme, où  $V$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ , donc  $\varphi$  vérifie :

$$(1.7) \quad \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 = 0.$$

**Théorème 1.3.1.** [2] Soit  $z : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  une submersion lisse. Alors  $z$  est semi-conforme, avec des arcs de cercles comme fibres, si et seulement si,  $z$  est localement déterminée par l'équation :

$$(1.8) \quad |x|^2 + 2\xi(z).x + \xi(z)^2 = 0$$

où  $\xi(z) = (\xi_1(z), \xi_2(z), \xi_3(z))$  est holomorphe en  $z$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ .

**Exemple 1.3.1.** Soit  $z : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  une application semi-conforme, qui admet des arcs de cercles comme fibres donnés par :

$$|x|^2 + 2\xi(z).x + \xi(z)^2 = 0$$

où  $\xi(z) = (-z, iz, 0)$ . En écrivant  $z = u + iv$ , on en déduit que  $a = (u, v, 0)$  et  $n = (-v, u, 0)$ . Le but de cet exemple sera de chercher le vecteur tangent à ces fibres, qui détermine un feuilletage conforme. L'équation (1.8), s'écrit alors sous la forme :

$$|x|^2 - 2z(x_1 - ix_2) = 0.$$

On paramétrise d'abord les fibres par  $s$ , soit :

$$s \mapsto (u, v, 0) + \cos s(u, v, 0) + \sin s(0, 0, |z|).$$

Donc  $x(s) = (z, 0) + (z, 0) \cos s + (0, |z|) \sin s$  est le fibre déterminé par  $z$ .

Or le vecteur tangent  $U$  est donné par :

$$U = \frac{x'(s)}{|x'(s)|},$$

ce qui montre que le vecteur tangent aux fibres au point  $x(s) = ((1 + \cos s)z, |z| \sin s)$  est donné par :

$$U = \left(-\frac{z}{|z|} \sin s, \cos s\right).$$

Il reste à calculer  $U$  en fonction de  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  ; par un simple calcul, on obtient :

$$U(x_1, x_2, x_3) = (\pm 2x_1x_3, \pm 2x_2x_3, x_1^2 + x_2^2 - x_3^2).$$

On verra après qu'il s'agit d'un exemple d'une application biharmonique et non-harmonique.

### 1.3.3 Quantité conservée pour les applications semi-conformes

Par la suite,  $U$  désigne le vecteur unitaire tangent au feuilletage conforme d'une application semi-conforme  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$  entre deux variétés riemanniennes orientées. Pour les applications semi-conformes  $\varphi = f + ih$  définies sur un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ ,  $U$  est donné par :

$$(1.9) \quad U = \frac{\nabla f \wedge \nabla h}{|\nabla f \wedge \nabla h|}.$$

**Lemme 1.3.3.** Soient  $(M^{n+1}, g)$  et  $(N^n, h)$  deux variétés riemanniennes orientées,  $\varphi : (M^{n+1}, g) \rightarrow (N^n, h)$  une application semi-conforme de dilatation  $\lambda$ ,  $U$  le vecteur unitaire tangent aux fibres de  $\varphi$ . Alors :

$$\operatorname{div}(\lambda^n U) = 0.$$

**Preuve** Par le théorème 1.2.2 et l'équation (1.6),  $U$  est un vecteur tangent à un feuilletage conforme, alors :

$$(1.10) \quad \mathcal{L}_U g(X, Y) = -2U(\ln \lambda)g(X, Y)$$

pour tout  $X, Y \in (U^\perp)$ .

Soit  $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1} = U\}$  une base orthonormée de  $M^n$ . Rappelons qu'on somme sur les indices répétés. Dans la suite, l'indice  $i \in \{1, \dots, n\}$ . D'une part,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} U &= \nabla_{e_i}(\langle U, \cdot \rangle)(e_i) + \nabla_U(\langle U, \cdot \rangle)(U) \\ &= e_i(\langle U, e_i \rangle) - \langle U, \nabla_{e_i} e_i \rangle \\ &= -\langle U, \nabla_{e_i} e_i \rangle \\ &= \langle \nabla_{e_i} U, e_i \rangle. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_U g)(e_i, e_i) &= 2g(\mathcal{L}_U e_i, e_i) \\ &= -2g(\nabla_U e_i - \nabla_{e_i} U, e_i) \\ &= -2g(\nabla_U e_i, e_i) + 2g(\nabla_{e_i} U, e_i) \\ &= -U\{g(e_i, e_i)\} + 2g(\nabla_{e_i} U, e_i) \\ &= +2g(\nabla_{e_i} U, e_i) \\ &= 2\operatorname{div} U. \end{aligned}$$

Mais par l'équation (1.10),

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_U g)(e_i, e_i) &= -2U(\ln \lambda)g(e_i, e_i) \\ &= -2nU(\ln \lambda) \end{aligned}$$

et donc  $\operatorname{div} U = -nU(\ln \lambda)$ . Si on multiplie  $U$  par une fonction  $f$  on obtient :

$$\operatorname{div}(fU) = \langle U, \operatorname{grad} \ln(f) \rangle + f \operatorname{div}(U),$$

alors,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(fU) = 0 &\Leftrightarrow \langle U, \operatorname{grad} \ln(f) \rangle + f \operatorname{div} U = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle U, \operatorname{grad} \ln(f) \rangle - n \langle U, \operatorname{grad} \ln(\lambda) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle U, \operatorname{grad} \ln(f\lambda^{-n}) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow f = a\lambda^n \end{aligned}$$

pour une constante  $a$ . □

**Corollaire 1.3.1.** Soit  $\mathbf{V}$  un ouvert de  $M^{n+1}$  dont la frontière  $\partial\mathbf{V} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$  est la réunion disjointe de deux hypersurfaces  $C^\infty$  compactes connexes,  $\varphi : \mathbf{V} \rightarrow N^n$  une submersion semi-conforme alors,

$$\int_{\mathcal{S}_1} \lambda^n U \cdot d\vec{\sigma}_1 = \int_{\mathcal{S}_2} \lambda^n U \cdot d\vec{\sigma}_2$$

où  $d\vec{\sigma}_i$  est l'élément de volume sur  $\mathcal{S}_i, i = 1, 2$ .

C'est-à-dire que  $\int_{\mathcal{S}} (\lambda^n U) \cdot d\vec{\sigma}$  est bien définie et indépendante du choix de  $\mathcal{S}$  tout en évitant les singularités de  $\varphi$ .

**Preuve** Soit  $V \subset M^{n+1}$  sur lequel  $\varphi$  est bien définie et lisse, on applique le théorème de Stokes :

$$\int_V \text{div}(\lambda^n U) dv = \int_{\partial V} \lambda^n U \cdot d\vec{\sigma}$$

où  $d\vec{\sigma}$  est l'élément de surface sur  $\partial v$ . Puisque la frontière orientée  $\partial V = \mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2$ , on en déduit que :

$$\int_{\mathcal{S}_1} \lambda^n U \cdot d\vec{\sigma}_1 - \int_{\mathcal{S}_2} \lambda^n U \cdot d\vec{\sigma}_2 = 0.$$

□

**Lemme 1.3.4.**  $\int_{\mathcal{S}} (\lambda^n U) \cdot d\vec{\sigma}$  est conformément invariante.

**Preuve** Soit  $\tilde{g} = a^2 g$  une nouvelle métrique,

$$\phi_i^\alpha \phi_j^\beta h_{\alpha\beta} = \lambda^n g_{ij} = \frac{\lambda^n}{a^2} a^2 g_{ij} \Rightarrow \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{a}$$

$$d\tilde{\sigma} = \sqrt{\det \tilde{g}_{\alpha\beta}} dx^\alpha dx^\beta = \sqrt{a^4 \det g_{\alpha\beta}} dx^\alpha dx^\beta = a^2 d\sigma$$

mais,  $\tilde{U} = \frac{U}{a}$ , et  $\tilde{n} = \frac{n}{a}$ , alors,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} (\lambda^n U) d\vec{\sigma} &= \int_{\mathcal{S}} \lambda^n g(U, \vec{n}) d\vec{\sigma} \\ &= \int_{\mathcal{S}} \frac{\lambda^n}{a^2} (a^2 g)(\tilde{U}, \tilde{n}) a^2 d\vec{\sigma} \\ &= \int_{\mathcal{S}} (\tilde{\lambda}^n \tilde{U}) \cdot d\vec{\sigma}. \end{aligned}$$

□

Par contre,  $\int_{\mathcal{S}} (\lambda^n U) d\vec{\sigma}$  dépend du choix de la métrique sur  $N$ .

**Exemple 1.3.2.** La projection radiale est définie par :

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{R}^3 &\rightarrow S^2 \\ x &\rightarrow \frac{x}{|x|}.\end{aligned}$$

Alors  $\lambda = \frac{1}{|x|}$ ; et si  $S^2(r)$  est la sphère de rayon  $r$  dont le centre est l'origine munie de son élément de volume  $d\sigma_r$ , il s'ensuit que

$$\int_{S^2(r)} \frac{1}{|x|^2} d\sigma_r = \frac{1}{r^2} \text{Aire}(S^2(r)) = \frac{1}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi. \quad \square$$

**Exemple 1.3.3.** L'exemple du disque :

Soit  $D$  le disque  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 = 0, x_2^2 + x_3^2 \leq a^2\}$  où  $a$  est un nombre quelconque. Soit  $\psi : \mathbb{R}^3/D \rightarrow S^2$  l'application définie par :

$$\begin{aligned}\psi(s, \theta, \phi) &= \left( \cos \theta, \frac{\sin \theta (s \cos \theta + a \sin \phi)}{\sqrt{a^2 + s^2}}, \frac{\sin \theta (-a \cos \phi + s \sin \theta)}{\sqrt{a^2 + s^2}} \right) \\ &= (\cos t, \sin t \exp(i\rho))\end{aligned}$$

où  $t = \theta$  et  $\rho = \phi - \arctan(\frac{a}{s})$ , et les coordonnées  $(s, \theta, \phi)$  sont déterminées par les équations :

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{s^2} + \frac{x_2^2 + x_3^2}{a^2 + s^2} = 1, s \geq 0 \\ x_1 = s \cos \theta \\ x_2 = \sqrt{a^2 + s^2} \sin \theta \cos \phi \\ x_3 = \sqrt{a^2 + s^2} \sin \theta \sin \phi. \end{cases}$$

La métrique  $g = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ , s'exprime en terme des nouvelles variables par :

$$g = \frac{s^2 + a^2 \cos^2 \theta}{a^2 + s^2} ds^2 + (s^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 + (a^2 + s^2) \sin^2 \theta d\phi^2.$$

L'élément de volume est donné par  $dv_g = \sqrt{\det g} ds d\theta d\phi$ , où

$$\begin{aligned}\det g &= \begin{vmatrix} \frac{s^2 + a^2 \cos^2 \theta}{a^2 + s^2} & 0 & 0 \\ 0 & s^2 + a^2 \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & (a^2 + s^2) \sin^2 \theta \end{vmatrix} \\ &= (s^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2 \sin^2 \theta,\end{aligned}$$

alors,  $dv_g = (s^2 + a^2 \cos^2 \theta) \sin \theta ds d\theta d\phi$ .

On considère la surface  $\mathcal{S} : s = \text{cte}$ ; paramétrée par  $\theta, \phi$ ;  $T\mathcal{S}$  est engendrée par  $\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\phi}$ , et de vecteur normal

$$n = \sqrt{\frac{a^2 + s^2}{s^2 + a^2 \cos^2 \theta}} \frac{\partial}{\partial s}.$$

Pour l'élément d'aire  $d\sigma$ , on considère la forme classique  $d\sigma = \sqrt{EG - F^2} d\theta d\phi$ , où  $\mathcal{S} = X(\vec{U})$

$$\vec{X}(\theta, \phi) = (s \cos \theta, \sqrt{a^2 + s^2} \sin \theta \cos \phi, \sqrt{a^2 + s^2} \sin \theta \sin \phi)$$

et

$$I = E d\theta^2 + 2F d\theta d\phi + G d\phi^2$$

est la première forme fondamentale de  $S$  avec

$$E = \vec{X}_\theta \cdot \vec{X}_\theta, F = \vec{X}_\theta \cdot \vec{X}_\phi, G = \vec{X}_\phi \cdot \vec{X}_\phi.$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned} E &= s^2 \sin^2 \theta + (a^2 + s^2) \cos^2 \theta = s^2 + a^2 \cos^2 \theta \\ F &= 0 \\ G &= (a^2 + s^2) \sin^2 \theta \\ d\sigma &= \sqrt{(a^2 + s^2)(s^2 + a^2 \cos^2 \theta)} \sin \theta d\theta d\phi. \end{aligned}$$

Les fibres de  $\psi$  sont déterminées par les équations :

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 = \text{constant} \\ \phi - \arctan\left(\frac{a}{s}\right) &= c \\ \Leftrightarrow s &= a \cot(\phi + c). \end{aligned}$$

Notons que :

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \cos(\phi + c - c) \\ &= \frac{s \cos c + a \sin c}{\sqrt{a^2 + s^2}} \\ \sin \phi &= \sin(\phi + c - c) \\ &= \frac{a \cos c - s \sin c}{\sqrt{a^2 + s^2}}. \end{aligned}$$

On paramétrise les fibres dans le système de coordonnées  $(s, \theta, \phi)$  par :

$$s \rightarrow (x_1(s), x_2(s), x_3(s)) = (s \cos \theta_0, (s \cos c + a \sin c) \sin \theta_0, (a \cos c - s \sin c) \sin \theta_0)$$

et on calcule,

$$U = \frac{\partial}{\partial s} - \frac{a}{a^2 + s^2} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

alors,

$$\langle U, n \rangle = g(u, n) = \sqrt{\frac{a^2 + s^2}{s^2 + a^2 \cos^2 \theta}} \times \frac{s^2 + a^2 \cos^2 \theta}{a^2 + s^2}$$

D'autre part, on peut calculer le facteur de conformalité  $\lambda$ , par l'équation  $g^{ij}\psi_i^\alpha\psi_j^\beta = \lambda^2 h^{\alpha\beta}$ . Alors on trouve que :

$$\lambda^2 = \frac{1}{s^2 + a^2 \cos^2 \theta}.$$

Finalement

$$\int_S (\lambda^2 \cdot U) \cdot d\vec{\sigma} = \int_\phi \int_\theta \lambda^2 \langle U, n \rangle d\vec{\sigma} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi \square$$

Observons que lorsque  $a \rightarrow 0$ , cet exemple tend vers l'exemple 1.3.2.

## 1.4 Morphismes harmoniques, applications biharmoniques

Afin d'étudier les morphismes harmoniques et les applications semi-conformes définies sur l'espace de Minkowski (variété semi-riemannienne), on va rappeler les notions de morphismes harmoniques définis sur une variété semi-riemannienne.

### 1.4.1 Applications et morphismes harmoniques

Les applications harmoniques entre deux variétés semi-riemanniennes se définissent à l'aide de l'énergie, elles sont donc solutions d'un problème variationnel pour les applications de  $M$  dans  $N$ .

Soit  $(M^m, g)$  une variété semi-riemannienne, le Laplacien  $\Delta = \Delta^M$  est donné, dans un système de coordonnées locales  $(x^1, \dots, x^m)$ , par :

$$(1.11) \quad \Delta^M f = g^{ij} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right)$$

$$(1.12) \quad = \frac{1}{\sqrt{|\det(g_{ij})|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{|\det(g_{ij})|} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right).$$

**Exemple 1.4.1.** Dans l'espace de Minkowski, le Laplacien est donné par

$$\Delta^M f = -\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}.$$



Une fonction de classe  $C^2$ , définie sur une variété semi-riemannienne  $(M, g)$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  est harmonique, si et seulement si  $\Delta^M(f) = 0$ . Un exemple : une fonction  $f(t, x_1, x_2, x_3) = \alpha(t + x_1)$ , où  $\alpha$  ne dépend que d'une seule variable, ce qui montre qu'on n'a pas la régularité associée aux fonctions harmoniques sur une variété riemannienne (il suffit de prendre une fonction  $\alpha$  de classe  $C^2$  mais pas de classe  $C^3$ ).

Soient maintenant  $(M^m, g)$  et  $(N^n, h)$  deux variétés semi-riemanniennes,  $\varphi : M \rightarrow N$  une application  $C^2$ . La densité d'énergie de  $\varphi$  est définie par :  $e_\varphi = \frac{1}{2}|d\varphi|^2$ , où  $|\cdot|^2$  désigne la norme carrée de Hilbert-Schmidt sur  $T^*M \otimes \varphi^{-1}TN$  induite par les métriques sur  $M$  et  $N$ , alors,

$$|d\varphi|^2 = \text{Tr}_g(\varphi^*h) = g^{ij}h(d\varphi(X_i), d\varphi(X_j)) = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i)),$$

où  $\{X_i\}$  est une base arbitraire,  $\{e_i\}$  est une base orthonormale et  $\varepsilon_i = g(e_i, e_i) = \pm 1$ . Dans les coordonnées locales, on a :

$$e(\varphi) = \frac{1}{2}g^{ij}\varphi_i^\alpha\varphi_j^\beta h_{\alpha\beta}.$$

Ici  $\varphi_i^\alpha$  désigne la dérivée partielle  $\partial\varphi^\alpha/\partial x^i$ ,  $(g_{ij})$  dénote la métrique tenseur dans  $M$  avec un choix convenable de coordonnées locales,  $h_{\alpha\beta}$  la métrique tenseur dans  $N$ . On note que  $e(\varphi)$  peut prendre des valeurs négatives ou nulles, pour une application non-constante  $\varphi$ .

Soit  $D$  un domaine compact de  $M$ . On définit l'énergie de  $\varphi$  sur  $D$  par :

$$(1.13) \quad E(\varphi; D) = \int_D e(\varphi) v_g,$$

où  $v_g$  est l'élément de volume dans  $M$  défini par la métrique  $g$ , dans les coordonnées locales on écrit  $v_g = \sqrt{|\det(g_{ij})|} dx^1 \dots dx^m$ . Encore, et contrairement au cas des variétés riemmaniennes,  $E(\varphi; D)$  peut prendre des valeurs négatives ou nulles, pour une application non-constante.

**Définition 1.4.1.** Soient  $(M^m, g)$  et  $(N^n, h)$  deux variétés semi-riemanniennes, une application  $\varphi \in C^2(M, N)$  est dite harmonique si elle est un point critique de la fonctionnelle d'énergie (1.13) pour tout domaine compact  $D \subset M$ , c'est à dire si elle est une solution de l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\tau(\varphi) = 0,$$

où  $\tau(\varphi)$  est donnée par :

$$\tau(\varphi) = \text{Tr}_g \nabla d\varphi = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \nabla d\varphi(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \{ \nabla_{e_i}^\varphi(d\varphi(e_i)) - d\varphi(\nabla_{e_i}^M e_i) \}.$$

**Définition 1.4.2.** Soit  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$ . L'application  $\varphi$  est un morphisme harmonique si elle préserve l'équation de Laplace : pour toute fonction  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  harmonique sur  $V \subset N$  ouvert avec  $\varphi^{-1}(V)$  non vide, alors la composée  $f \circ \varphi$  est harmonique sur  $\varphi^{-1}(V)$  dans  $M$ .

Ce qui se traduit de la manière suivante :

**Proposition 1.4.1.** *Soit  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$  une application de classe  $C^\infty$ . Alors  $\varphi$  est un morphisme harmonique si et seulement si, pour toute fonction  $f$  réelle  $C^\infty$  définie sur un ouvert  $V$  de  $N$  tel que  $\varphi^{-1}(V)$  soit non vide,  $\Delta^M(f \circ \varphi) = \Lambda((\Delta^N f) \circ \varphi)$ , où  $\Lambda$  est une fonction  $C^\infty$  sur  $M$ .*

**Théorème 1.4.1.** *[14][15] Soit  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$ . L'application  $\varphi$  est un morphisme harmonique si et seulement si elle est à la fois une application semi-conforme et harmonique.*

**Exemple 1.4.2.** *Soit  $\varphi$  une fonction définie sur un ouvert de l'espace de Minkowski  $\mathbb{M}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , alors  $\varphi$  est un morphisme harmonique si et seulement si elle est solution des deux équations suivantes :*

$$(1.14) \quad \square\varphi := -\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} = 0$$

$$(1.15) \quad -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2 = 0$$

On note qu'un morphisme harmonique, défini sur un ouvert de l'espace de Minkowski, est solution de l'équation des ondes :  $\square\varphi = 0$  vérifiant la condition supplémentaire (1.15). On appellera une telle fonction "solution isotrope de l'équation des ondes".

## 1.4.2 Applications biharmoniques dont les fibres sont des arcs de cercles

Soient  $(M^m, g)$  et  $(N^n, h)$  deux variétés riemanniennes. Pour chaque fonction  $\varphi \in C^2(M, N)$ , on peut définir la bi-énergie

$$(1.16) \quad E_2(\varphi) = \frac{1}{2} \int_M |\tau(\varphi)|^2 dv_g$$

et le 2-champ de tension

$$(1.17) \quad \tau_2(\varphi) = -Tr_g(\nabla^\varphi)^2\tau(\varphi) - Tr_g R^N(\tau(\varphi), d\varphi)d\varphi$$

où  $Tr_g(\nabla^\varphi)^2 = \sum_i (\nabla_{e_i}^\varphi \nabla_{e_i}^\varphi - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i}^\varphi)$  ( $\{e_i\}$  un repère orthonormé) est le Laplacien sur les sections du fibré  $\phi^{-1}TN$  et  $R^N$  désigne le tenseur de courbure sur  $(N^n, h)$ .

**Définition 1.4.3.** *Soient  $(M^m, g)$  et  $(N^n, h)$  deux variétés riemanniennes. Une application  $\varphi \in C^4(M, N)$  est dite biharmonique si elle est un point critique de la fonctionnelle bi-énergie (1.16), c'est à dire si elle est une solution de l'équation d'Euler-Lagrange associée :*

$$\tau_2(\varphi) = 0.$$

Il est clair que toute application harmonique est biharmonique. L'inverse n'est pas vrai : c'est le cas de l'application de Hopf dans l'exemple 1.2.4.

**Cas particulier :**

Soit  $f$  une application définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^N (N \geq 1)$ . Alors  $f$  est une application biharmonique si le bilaplacien de  $f$  est nul, i.e.  $\Delta(\Delta f) = 0$ .

On peut maintenant donner un résultat concernant les applications biharmoniques semi-conformes, dont les fibres sont des arcs de cercles ; c'est un résultat quelque part similaire à celui du théorème de Weierstrass [1] qui donne tous les morphismes harmoniques définis sur un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

Pour deux vecteurs  $v = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3$  on définit le produit symétrique :

$$v.w = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$$

et on écrit :  $v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$

**Théorème 1.4.2.** *Soit  $z : B \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  une application semi-conforme biharmonique, définie sur un ouvert  $B$  de  $\mathbb{R}^3$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , telle que les fibres de  $z$  sont données par des arcs de cercles, alors, quitte à effectuer une isométrie et une dilatation dans  $\mathbb{R}^3$ , localement  $z$  est donné par :*

$$(1.18) \quad 2z(x_1, x_2, x_3) = \frac{-|x|^2 - 2iA.x + |A|^2}{x_1 \pm ix_2 + ai \mp b}$$

où  $A = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

Avant de démontrer notre théorème, on va établir deux lemmes.

Dans la suite,  $\xi(z) = (\xi_1(z), \xi_2(z), \xi_3(z))$  est holomorphe en  $z$ .

**Lemme 1.4.1.** *Soit  $z : B \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  une application semi-conforme qui est une solution de  $|x|^2 + 2\xi(z).x + \xi(z)^2 = 0$ , alors le bilaplacien de  $z$  est donné par :*

$$\Delta(\Delta z) = \frac{\xi''.(x + \xi) + \xi'^2}{[\xi'.(x + \xi)]^3}$$

où  $\cdot$  est le produit scalaire réel.

**Preuve** En dérivant l'équation (1.8) par rapport à  $x_j$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & 2\xi'\xi \frac{\partial z}{\partial x_j} + 2\xi'.x \frac{\partial z}{\partial x_j} + 2\xi_j + 2x_j = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\partial z}{\partial x_j} = -\frac{(x_j + \xi_j)}{\xi'.(x + \xi)} \quad (\xi'.(x + \xi) \neq 0). \end{aligned}$$

On dérive encore une fois par rapport à la même variable  $x_j$ , on somme les différentes dérivées par rapport aux différentes variables, et on utilise le fait que  $z$  est une application semi-conforme, c'est-à-dire que  $\sum_{j=1}^3 (\frac{\partial z}{\partial x_j})^2 = 0$ , on trouve que

$$(1.19) \quad \Delta z = -\frac{1}{\xi' \cdot (x + \xi)}.$$

On fait la même manipulation pour  $\Delta z$ , autrement dit on calcule les dérivées partielles de  $\Delta z$  par rapport à  $x_j$ , et l'on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\Delta z) = \frac{[\xi'' \cdot (x + \xi) + \xi'^2] \frac{\partial z}{\partial x_j} + \xi'_j}{[\xi' \cdot (x + \xi)]^2}.$$

On dérive encore une fois cette expression par rapport à  $x_j$  et on somme, on obtient :

$$\Delta(\Delta(z)) = \frac{\xi'' \cdot (x + \xi) + \xi'^2}{[\xi' \cdot (x + \xi)]^3}.$$

□

**Lemme 1.4.2.** Soit  $z : B \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  une application semi-conforme biharmonique, qui est localement une solution de l'équation  $|x|^2 + 2\xi(z) \cdot x + \xi(z)^2 = 0$  ; Alors, quitte à effectuer une isométrie et une dilatation dans  $\mathbb{R}^3$ , les  $\xi_j$  sont données par

$$\xi = (z + ai, \pm iz + bi, ci)$$

où  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

**Preuve** D'après le lemme 1.4.1, le bilaplacien de  $z$  est donné par

$$\Delta(\Delta(z)) = \frac{\xi'' \cdot (x + \xi) + \xi'^2}{[\xi' \cdot (x + \xi)]^3},$$

ce qui montre que  $z$  est biharmonique si et seulement si :

$$\xi'' \cdot (x + \xi) + \xi'^2 = 0 \quad (\text{condition de biharmonicité}).$$

On dérive cette dernière équation par rapport à  $x_j$  :

$$\begin{aligned} \xi''' \cdot (x + \xi) \frac{\partial z}{\partial x_j} + \xi_j'' + 3\xi' \xi'' \frac{\partial z}{\partial x_j} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x_j} &= -\frac{\xi_j''}{\xi''' \cdot (x + \xi) + 3\xi' \xi''}. \end{aligned}$$

Or,  $\frac{\partial z}{\partial x_j} = -\frac{(x_j + \xi_j)}{\xi' \cdot (x + \xi)}$ , ce qui montre que :

$$[\xi' \cdot (x + \xi)] \xi'' = [\xi''' \cdot (x + \xi) + 3\xi' \xi''] [\xi + x].$$

En faisant le produit scalaire des deux côtés de cette dernière équation avec  $\xi'$ , on obtient, soit  $\xi' \cdot (x + \xi) = 0$ , soit,

$$(1.20) \quad [\xi' \cdot (x + \xi)]\xi'' = (\xi'' \cdot \xi')(x + \xi).$$

Mais on calcule en un point régulier et d'après (1.19)  $\xi' \cdot (x + \xi) \neq 0$ .

Or,  $\xi' \cdot (x + \xi)$  et  $\xi'' \cdot \xi'$  sont deux scalaires, alors  $\xi''$  est proportionnel à  $(x + \xi)$ , d'où par l'équation (1.8),  $\xi'' \cdot (x + \xi) = 0$ , et d'après la condition de biharmonicité on obtient que  $\xi'^2 = 0 \Rightarrow \xi' \cdot \xi'' = 0$ . Il s'ensuit alors que,  $\xi'' = 0$  d'après l'équation (1.20). On obtient finalement que les deux quantités  $\xi'^2$  et  $\xi''$  sont nulles.

Maintenant, on considère l'effet d'une isométrie et une dilatation sur la représentation

$$|x|^2 + 2\xi \cdot x + \xi^2 = (x + \xi) \cdot (x + \xi) = 0.$$

En effet, si  $x \rightarrow \hat{x}$  est une transformée conforme de  $\mathbb{R}^3$ , alors le feuilletage conforme par des cercles donnée par cette équation est transformé en un nouveau feuilletage conforme donné par une équation

$$|\hat{x}|^2 + 2\hat{\xi} \cdot \hat{x} + \hat{\xi}^2 = 0.$$

On voit alors que : (i) si  $\hat{x} = Bx$ ,  $B \in O(3)$  une transformation orthogonale, alors  $\hat{\xi} = \xi B^t$  où  $B^t$  est la transposée de  $B$ ; (ii) si  $\hat{x} = x - v$ ,  $v \in \mathbb{R}^3$  est une translation, alors  $\hat{\xi} = \xi - v$ ; (iii) si  $\hat{x} = \lambda x$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  est une dilatation, alors  $\hat{\xi} = \lambda \xi$ . On peut alors transformer par une isométrie et une dilatation le vecteur isotrope constant  $\xi'$  en  $(1, \pm i, 0)$ . En intégrant, on obtient  $\xi = (z + \alpha, \pm iz + \beta, \gamma)$ ,  $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C})$ . Mais, en appliquant une translation, on peut supposer que  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont imaginaires, d'où, l'obtention de la forme

$$\xi = (z + ai, \pm zi + bi, ci), \quad (a, b, c \in \mathbb{R}).$$

□

Maintenant on peut montrer le théorème .

**Preuve** D'après le théorème 1.3.1,  $z$  est une application semi-conforme avec des arcs de cercles comme fibres, alors  $z$  est localement donnée par l'équation

$$|x|^2 + 2\xi(z) \cdot x + \xi(z)^2 = 0.$$

On utilise le lemme 1.4.2 pour montrer que  $\xi$  s'écrit sous la forme  $\xi = (z + ai, \pm iz + bi, ci)$ , avec  $\lambda, a, b, c \in \mathbb{R}$ .

En remplaçant  $\xi$  par cette expression, on obtient par simple calcul que

$$2z(x_1, x_2, x_3) = \frac{-|x|^2 - 2iA \cdot x + |A|^2}{x_1 \pm ix_2 + ai \mp b}$$

□

**Exemple 1.4.3.** *Application de Hopf : Dans l'exemple 1.2.4, on a montré que l'application de Hopf est une application semi-conforme, un simple calcul montre que le laplacien de  $H$ ,  $\Delta H = -x_2/(x_2^2 + x_3^2)$  ; alors  $H$  n'est pas une application harmonique. Cependant, pour le calcul du bilaplacien on trouve zéro, ce qui montre qu'il s'agit d'une application biharmonique ; d'où l'exemple d'une application biharmonique qui n'est pas harmonique.*

*Pour appliquer le théorème à cet exemple, on pose  $H = z = f + ih$ , et  $q = x_2 + ix_3$ , alors*

$$z = \frac{(1 - \frac{|x|^2}{2})q - i\sqrt{2}x_1q}{q\bar{q}}$$

$$\bar{q}z = (1 - \frac{|x|^2}{2}) - i\sqrt{2}x_1$$

*donc  $|x|^2 - 2 + 2i\sqrt{2}x_1 + 2\bar{q}z = 0$ , soit  $\xi = (i\sqrt{2}, z, -iz)$ . Quitte à effectuer une isométrie,  $\xi$  est de la forme comme dans le lemme 1.4.2. On obtient finalement que dans l'exemple de Hopf,  $A = (\sqrt{2}, 0, 0)$*

**Exemple 1.4.4.** *On construit une application biharmonique  $z : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  dont les fibres sont les arcs des cercles qui passent par l'origine et qui sont tangent à l'axe des  $x_3$  en ce point. En écrivant  $z = u + iv$ , le fibre déterminé par  $z$  est le cercle de centre  $(u, v, 0)$ , de rayon  $|z|$  avec un vecteur normal donné par  $n = (-v, u, 0)$ . Alors :*

$$\begin{aligned}\xi &= -(u, v, 0) + i(-v, u, 0) \\ &= -z + iz \\ &= z(-1, i, 0)\end{aligned}$$

*qui, quitte à remplacer  $z$  par  $-z$ ,  $\xi$  est de la forme du lemme 1.4.2 avec  $A = (a, b, c) = 0$ . On obtient alors l'application biharmonique donnée par*

$$2z = \frac{|x|^2}{x_1 + ix_2}.$$

*Elle est singulière lorsque  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ , mais se prolonge en  $\infty \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  lorsque  $x_1 = x_2 = 0$ , et  $x_3 \neq 0$ .*

## 1.5 Graphes et réseaux

Plus tard dans la thèse, on prend la perspective que le concept d'espace se déduit d'objets plus fondamentaux de nature combinatoire. Cette perspective a été proposé par R. Penrose en 1971. Or, physiquement, on ne peut pas affirmer que toutes les matières sont continues : on étudie aussi le cas discret. Pour cela, on ne se limitera pas à l'étude des applications harmoniques entre les variétés riemanniennes et semi-riemanniennes (cas continu), mais on va aller plus loin pour étudier les fonctions harmoniques et holomorphes sur les graphes : mathématiquement, il s'agit du cas discret.

Un réseau est constitué d'une infinité d'éléments discrets, qui interagissent entre eux. Ces éléments sont considérés comme les sommets d'un graphe, et les segments qui lient ces sommets précisent la façon dont les éléments réagissent. Ce modèle d'interaction est souvent formulé sous forme d'un graphe.

Un graphe est la donnée de deux ensembles  $\Gamma = (V, E)$ ,  $V$  étant l'ensemble des sommets et  $E$  étant l'ensemble des arêtes reliant ces sommets. On peut noter l'arête allant de  $a_i$  à  $a_j$  par  $\overline{a_i a_j}$  ou  $\overrightarrow{a_i a_j}$  selon que l'arête est orientée ou non. On note  $\overrightarrow{a_i a_j}$  l'arête orientée qui va de  $a_i$  à  $a_j$ . Lorsqu'il existe une arête joignant  $a_i$  et  $a_j$ , on note  $a_i \sim a_j$ . On suppose qu'il n'existe pas d'arêtes bouclées, c'est-à-dire qu'on ne pourra pas avoir une arête dont les extrémités sont le même sommet. On suppose aussi la non-existence d'arêtes multiples, définies comme étant deux arêtes différentes reliant les mêmes sommets. En outre, nos définitions se prolongent à ces cas.

On peut également définir les graphes métriques, là où on munit les arêtes d'un poids. Mathématiquement, on définit la distance  $d(x, y)$  entre deux sommets  $x, y \in V$  par  $d(x, y) = \inf\{\text{Longueur } L(x, y) \text{ des chemins joignant } x \text{ et } y\}$ . Pour un graphe non-métrique, la longueur d'un chemin est tout simplement le nombre d'arêtes contenues dans le chemin. Pour un graphe métrique on tient compte du poids de chaque arête. Par la suite, on suppose que les graphes sont non-métriques.

Un graphe est fini si la cardinalité de  $V$  est finie, dans le cas contraire, on dit que  $\Gamma$  est un graphe infini. On donne la notion d'une fonction harmonique sur un graphe. En effet, pour un graphe  $\Gamma$ , on définit

$$\Delta f(x) = f(x) - \frac{1}{m(x)} \sum_{z \sim x} f(z), \quad x \in V, \quad f \in C(V),$$

où  $m(x)$  est le nombre de sommets voisins de  $x$ . Il en découle qu'une fonction  $f$  définie sur un graphe  $\gamma = (V, E)$  est harmonique si et seulement si  $\Delta f(x) = 0$  en tout point  $x \in V$ . C'est-à-dire que la fonction vérifie la propriété de moyenne : sa valeur en un sommet est la moyenne des valeurs sur les sommets voisins. Il s'ensuit que sur un graphe fini, toute fonction harmonique est constante. Dans [20] on introduit la notion des applications harmoniques entre graphes finis munis d'un poids, avec un théorème d'existence et d'unicité, analogue aux théorèmes classiques de Eells-Sampson-Hartman. Ces applications harmoniques donnent lieu ensuite à une nouvelle démonstration élémentaire d'un théorème de superrigidité.

Notre but sera de trouver des analogues à nos théorèmes trouvés dans cette thèse, dans le cas des fonctions ou applications définies sur des graphes.

Soit  $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$  et  $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$  deux graphes. Une application  $\varphi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$  entre deux graphes (ou un homomorphisme des graphes) est une application entre les sommets  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  telle que si  $x \sim y$ , alors, soit  $\varphi(x) = \varphi(y)$ , soit  $\varphi(x) \sim \varphi(y)$ . Selon Urukawa [25], une application  $\varphi : \Gamma_1 = (V_1, E_1) \rightarrow \Gamma_2 = (V_2, E_2)$  entre deux graphes est semi-conforme en un point  $x \in V_1$  si, en notant par  $z = \varphi(x)$ , pour tout  $z' \sim z$ , le nombre

$$\lambda(x, z') := \#\{x' \sim x; \varphi(x') = z'\}$$

est bien défini et dépend seulement de  $x$  (c'est-à-dire qu'il est indépendant du choix de  $z'$ ). Dans ce cas, on note :  $\lambda(x) = \lambda(x, z')$ . On dit que l'application  $\varphi$  est semi-conforme si elle

est semi-conforme en tout point  $x \in V_1$ . Dans le cas où  $x \in V_1$  est tel que  $\varphi(y) = \varphi(x)$  pour tout  $y \sim x$ , on pose  $\lambda(x) = 0$  et l'on obtient une fonction bien définie,  $\lambda : V_1 \rightarrow \mathbb{N}$ , appelée la dilatation de l'application  $\varphi$ .

On introduit maintenant l'un des concepts les plus importants dans notre étude, celui des fonctions holomorphes définies sur un graphe à valeurs dans l'espace des nombres complexes.

**Définition 1.5.1.** Soit  $\Gamma = (V, E)$  un graphe (non nécessairement fini), alors une fonction  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe en  $x \in V$  si

$$\sum_{y \sim x} (d\varphi(\overline{xy}))^2 = \sum_{y \sim x} (\varphi(y) - \varphi(x))^2 = 0.$$

On dit que  $\varphi$  est holomorphe, si elle est holomorphe en tout sommet  $x \in V$ .

Cette définition est une généralisation naturelle de l'équation :

$$\sum_i \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 = 0$$

qui caractérise une application semi-conforme  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  d'un domaine de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . Notons que si  $n = 2$ , cette dernière se decouple en un produit :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = 0,$$

ce qui caractérise les fonctions holomorphes ou anti-holomorphes dans le plan. La distinction entre holomorphe et anti-holomorphe dans le plan correspond au choix de l'orientation. Or, sur un graphe quelconque, on n'a pas de telle notion sans introduire d'autres concepts (plus tard, on introduira la notion d'orientation comme une coloration des arêtes). Il nous paraît alors naturel d'appeler les fonctions de la définition 1.5.1, holomorphes. Par contre, le terme holomorphe a été employé par I. Bobenko et C. Mercat [6] pour des fonctions à valeurs complexes définies sur un graphe rhombique, en termes d'une version discrète des équations de Cauchy-Riemann. Notre définition est valable sur tout graphe. Par contre, la caractérisation des graphes finis qui admettent une fonction holomorphe non-constante est un problème difficile à résoudre, dont on discutera dans le chapitre 4.





## Chapitre 2

# L'espace de Minkowski, algèbre de spineurs

La théorie des twisteurs, initialement introduite par Roger Penrose en 1967, est la théorie mathématique qui fait correspondre les objets géométriques de l'espace twistoriel complexe  $\mathbb{CP}^3$  dans la géométrie des rayons de lumière dans l'espace temps (espace de Minkowski). Dans cet espace, Les coordonnées sont appelées "twisteurs". Grâce à cette théorie, certaines équations importantes, par exemple les équations des champs sans masse et l'équation des applications harmoniques, peuvent être résolues dans l'espace twistoriel. Certains aspects sont attirants dans cette théorie. Tout d'abord, l'espace twistoriel devient l'espace de base de sorte que les rayons de lumière sont les objets les plus fondamentaux de l'espace-temps, qui est l'espace dérivé. Puis les quantités discrètes sont reflétées dans les valeurs discrètes obtenues par contour de l'intégration, Enfin l'élégance et la simplicité de la théorie.

Dans ce chapitre on donne les notations spinorielles des éléments de l'espace de Minkowski  $\mathbb{M}$ , qui seront utiles pour reformuler spinoriellement les morphismes harmoniques et les applications semi-conformes. On va utiliser cette reformulation pour montrer que dans le cas d'un morphisme harmonique  $f$  défini sur un ouvert de  $\mathbb{M}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , il existe deux champs spinoriels  $\xi_A$  et  $\eta_{A'}$  qui seront les seules deux directions possibles d'un champ isotrope dans  $\ker df$ . De plus, un de ces deux champs spinoriels est une "congruence de rayons de lumière sans cisaillement (SFR)", c'est-à-dire qu'il forme un feuilletage conforme par des droites isotropes dans cet ouvert de  $\mathbb{M}$ . On peut considérer une SFR comme un objet qui correspond à un champ physique. Plus précisément, la direction de chaque rayon en un point détermine un champ spinoriel qui vérifie une équation différentielle décrivant une particule. On étudie aussi les équations des ondes. Or, une application qui est solution isotrope de l'équation des ondes est un morphisme harmonique.

## 2.1 Notation spinorielle

En physique, le modèle standard classe les particules élémentaires en deux grandes familles : les fermions et les bosons. Formellement, les bosons sont caractérisés par le fait qu'ils peuvent être décrits par les champs de tenseurs dans l'espace de Minkowski. Par exemple, le photon est un boson : ainsi, son champ électromagnétique est représenté par une 2-forme dans  $\mathbb{M}$ . D'autre part, les fermions ne sont pas décrits par des tenseurs : pour ces derniers, on a besoin des champs spinoriels [17].

On introduit alors un système d'étiquetage

$$\mathfrak{L} = \{A, B, C, \dots, Z, A', B', C', \dots, Z'\}$$

pour l'espace spin et son dual, tel que, les éléments de  $\mathfrak{L}$  prennent les valeurs 0 et 1. On note par  $v^a = (v^0, v^1, v^2, v^3)$  un élément de l'espace de Minkowski. La métrique  $g$  dans  $\mathbb{M}$  sera donnée par  $g_{ab}$ , alors le carré de la longueur d'un vecteur  $v^a$  est donnée par  $g_{ab}v^av^b$ . Les indices seront abaissés et élevés par  $g_{ab}$  et son inverse :  $g^{ab}$ . Donc, si  $v^a$  est un vecteur dans  $\mathbb{M}$ , alors  $v_a = g_{ab}v^b$  est la 1-forme correspondante.

On note par  $\square$  le d'Alembertien dans  $\mathbb{M}$ , alors,

$$\square = g^{ab}\nabla_a\nabla_b,$$

où  $\nabla_a$  est la dérivée covariante dans  $\mathbb{M}$ , donnée par  $\nabla_a = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$ .

L'espace spin est un espace vectoriel complexe de dimension 2, noté par  $S^\bullet$ , équipé d'une forme symplectique, c'est-à-dire d'une forme complexe bilinéaire anti-symétrique notée  $\varepsilon_{AB}$ . Un élément de cet espace s'écrit sous la forme  $\xi^A$ , alors que les éléments de la forme  $\xi_A$  représentent les éléments de l'espace spin dual, noté par  $S_\bullet$ . On a alors l'identification  $\xi^A = \varepsilon^{AB}\xi_B$  entre les éléments de l'espace spin et son dual, où  $(\varepsilon_{AB}) = (\varepsilon^{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

On peut donner une version primée de l'espace de spin : cet espace sera noté par  $\bar{S}^\bullet$  dont les éléments s'écrivent sous la forme  $\eta^{A'} (A' \in \{0, 1\})$ , où  $\bar{\eta}^{A'} = \overline{\eta^A}$ . On définit aussi l'espace spin primé dual, noté par  $\bar{S}_\bullet$ .

En particulier,  $\varepsilon_{A'B'}$  et  $\varepsilon^{A'B'}$  sont deux formes symplectiques dans l'espace spin primé et son dual.

Un spineur mixte est un élément du produit tensoriel des différents espaces spin : par exemple, le spineur  $\psi^A_{BA'}$  est un élément de  $S^\bullet \otimes S_\bullet \otimes \bar{S}_\bullet$ .

Soit  $\mathbb{M}$  l'espace de Minkowski de dimension 4, on considère l'identification

$$(v^a) = (v^0, v^1, v^2, v^3) \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^0 + v^1 & v^2 + iv^3 \\ v^2 - iv^3 & v^0 - v^1 \end{pmatrix} = (v^{AA'})$$

d'un vecteur  $(v^a)$  dans  $\mathbb{M}$  et d'un spineur  $(v^{AA'})$ .

## 2.2 Reformulation spinorielle

On va donner une reformulation spinorielle des morphismes harmoniques et des applications semi-conformes. On note qu'on a une différence entre les notations spinorielles dans l'espace  $\mathbb{R}^4$  et celles dans l'espace de Minkowski.

### 2.2.1 Les morphismes harmoniques définis sur $\mathbb{R}^4$ en terme de spineurs

Un vecteur  $x^a$  dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^4$  est exprimé spinoriellement par la correspondance :

$$(x^a) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} ix^0 + x^1 & x^2 + ix^3 \\ x^2 - ix^3 & ix^0 - x^1 \end{pmatrix} = (x^{AA'}).$$

Une fonction  $\varphi : B \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $B$  ouvert de  $\mathbb{R}^4$ , est semi-conforme si et seulement si la somme des carrés de ses dérivées partielles est nulle, c'est-à-dire :

$$\sum_{a=0}^3 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x^a} \right)^2 = 0,$$

cette équation se traduit par le fait que  $\det \nabla_{AA'} \varphi = 0$ , où  $\nabla_{AA'}$  est l'opérateur différentiel défini par :

$$\nabla_{AA'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i\partial_0 + \partial_1 & \partial_2 - i\partial_3 \\ \partial_2 + i\partial_3 & -i\partial_0 - \partial_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_{00'} & \nabla_{01'} \\ \nabla_{10'} & \nabla_{11'} \end{pmatrix},$$

ce qui montre que  $\varphi$  est semi-conforme si et seulement si

$$\nabla_{AA'} \varphi = \xi_A \eta_{A'},$$

avec  $\xi_A$  et  $\eta_{A'}$  deux champs spinoriels définis sur  $B \subset \mathbb{R}^4$ .

De plus, la fonction  $\varphi$  est harmonique, si et seulement si

$$\sum_{a=0}^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial (x^a)^2} = 0.$$

Cette équation s'écrit sous une autre forme :  $\nabla^{AA'} \nabla_{AA'} \varphi = 0$ , on en déduit que  $\varphi$  est un morphisme harmonique si et seulement si

$$\nabla^{AA'} \xi_A \eta_{A'} = 0.$$

Réciproquement, étant donné qu'il existe une paire de champs spinoriels  $\xi_A, \eta_{A'}$  dans  $B$ , on va chercher ces conditions qui assurent que ces champs déterminent un morphisme harmonique. On considère maintenant le produit  $\xi_A \eta_{A'}$  qui détermine un champ de vecteurs isotropes.

Afin que  $\xi_A \eta_{A'} = \nabla_{AA'} \varphi$  pour une fonction  $\varphi$ , on a besoin du fait que  $\nabla_{[a} v_{b]}$  soit nul. Cela est calculé pour être l'équivalent des six équations suivantes :

$$\begin{cases} (i) & \nabla_{11'} \xi^1 \eta^{1'} - \nabla_{00'} \xi^0 \eta^{0'} = 0 \\ (ii) & \nabla_{01'} \xi^0 \eta^{1'} - \nabla_{10'} \xi^1 \eta^{0'} = 0 \\ (iii) & \nabla_{A0'} \xi^A \eta^{1'} = 0 \\ (iv) & \nabla_{A1'} \xi^A \eta^{0'} = 0 \\ (v) & \nabla_{0B'} \xi^1 \eta^{B'} = 0 \\ (vi) & \nabla_{1B'} \xi^0 \eta^{B'} = 0 \end{cases}$$

Le théorème suivant montre une correspondance entre les morphismes harmoniques et les champs spinoriels.

**Théorème 2.2.1.** *Il existe une correspondance entre les morphismes harmoniques  $\varphi : B \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}$ , et une paire de champs spinoriels  $(\xi_A, \eta_{A'})$  satisfaisant :*

$$\begin{cases} \nabla_{AA'} \xi^A \eta^{B'} = 0 \\ \nabla_{AB'} \xi^C \eta^{B'} = 0 \end{cases}$$

**Preuve** En partant de nos deux équations, on peut facilement montrer les six équations ci-dessus et l'équation  $\nabla^{AA'} \xi_A \eta_{A'}$ . Ce qui montre l'existence d'un morphisme harmonique. Réciproquement, Donné un morphisme harmonique  $\varphi$ , alors  $\nabla_{AA'} \xi^A \eta^{A'} = 0$  et (i)  $\rightarrow$  (vi) sont vérifiées. On montre que  $\nabla_{AA'} \xi^A \eta^{B'} = 0$  dans le cas ou  $A' = B' = 0$ . On démontre d'une manière similaire pour les autres valeurs de  $A'$  et  $B'$ . Or

$$\begin{aligned} \nabla_{00'} \xi^0 \eta^{0'} + \nabla_{10'} \xi^1 \eta^{0'} &= (\nabla_{00'} \xi^0 \eta^{0'} + \nabla_{11'} \xi^1 \eta^{1'} + \nabla_{10'} \xi^1 \eta^{0'} + \nabla_{01'} \xi^0 \eta^{1'})/2 \quad \text{d'après (i) et (ii)} \\ &= 0 \quad \text{car} \quad \nabla^{AA'} \xi_A \eta_{A'} = 0. \end{aligned}$$

□

**Exemple 2.2.1.** *On considère l'exemple des applications qui admettent des fibres totalement géodésiques. Elles sont classifiées en [4]. Si  $\varphi : B \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}$  est un morphisme harmonique dont les fibres sont totalement géodésiques, alors, localement,  $\varphi$  est donnée implicitement par l'équation*

$$\alpha_0(\varphi(x))x^0 + \alpha_1(\varphi(x))x^1 + \alpha_2(\varphi(x))x^2 + \alpha_3(\varphi(x))x^3 = 1,$$

où  $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ ,  $\alpha_i(z)$  est holomorphe en  $z$  pour chaque  $i = 0, 1, 2, 3$  et  $\alpha^2 = 0$ . On peut paramétriser  $\alpha$  sous la forme  $\alpha = (1/2h)(1 - f^2 - g^2, i(1 + f^2 + g^2), -2f, -2g)$  où  $f, g, h : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  sont des fonctions méromorphes. En dérivant cette équation par rapport à  $x_i$  on obtient :

$$(\alpha'.x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \alpha_i = 0 \quad \text{alors} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\frac{\alpha_i}{\alpha'.x}$$

d'où

$$\nabla_{AA'}\varphi = -\frac{1}{\alpha'.x} \begin{pmatrix} -i\alpha_0 + \alpha_1 & \alpha_2 - i\alpha_3 \\ \alpha_2 + i\alpha_3 & -i\alpha_0 - \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que :

$$\xi_A = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}(\alpha'.x)h}} \begin{pmatrix} f - ig \\ i \end{pmatrix}$$

et

$$\eta_{A'} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}(\alpha'.x)h}} (-f + ig, 1)$$

### 2.2.2 Les morphismes harmoniques définis sur l'espace de Minkowski en terme de spineurs

On définit la correspondance spinorielle dans  $\mathbb{M}$  par :

$$(t, x^1, x^2, x^3) \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} t + x^1 & x^2 + ix^3 \\ x^2 - ix^3 & t - x^1 \end{pmatrix} = (x^{AA'}).$$

Notons en particulier que pour  $(t, x^1, x^2, x^3)$  réel, la matrice  $X = (x^{AA'})$  est hermitienne :  $\overline{X}^t = X$ .

On considère une application  $\varphi : B \subset \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{C}$ , où  $B$  est un ouvert de l'espace de Minkowski, qui vérifie les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} -(\frac{\partial \varphi}{\partial t})^2 + \sum_{i=1}^3 (\frac{\partial \varphi}{\partial x_i})^2 = 0 \\ -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = 0. \end{cases}$$

C'est-à-dire que la fonction  $\varphi$  est un morphisme harmonique, autrement dit, une solution isotrope de l'équation des ondes.

Une reformulation spinorielle est donnée comme dans le cas de  $\mathbb{R}^4$ . Pour la dérivée covariante, on a la correspondance suivante :

$$\nabla_{AA'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \partial_0 + \partial_1 & \partial_2 - i\partial_3 \\ \partial_2 + i\partial_3 & \partial_0 - \partial_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_{00'} & \nabla_{01'} \\ \nabla_{10'} & \nabla_{11'} \end{pmatrix}.$$

Par un calcul similaire au cas des morphismes harmoniques définis sur  $\mathbb{R}^4$ , on obtient le théorème suivant :

**Théorème 2.2.2.** *Il existe une correspondance entre les morphismes harmoniques définis sur un ouvert de l'espace de Minkowski et une paire de champs spinoriels  $(\xi^A, \eta^{A'})$  sur cet ouvert qui satisfait les équations suivantes :*

$$\begin{cases} \nabla_{AA'} \xi^A \eta^{B'} = 0 \\ \nabla_{AB'} \xi^C \eta^{B'} = 0. \end{cases}$$

### 2.2.3 Notation spinorielle dans $\mathbb{R}^3$

On définit la correspondance spinorielle dans  $\mathbb{R}^3$  par :

$$(x^a) = (x^1, x^2, x^3) \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x^2 + ix^3 & -x^1 \\ -x^1 & -x^2 + ix^3 \end{pmatrix} = (x^{AB})$$

et l'opérateur différentiel  $D_{AB}$  par :

$$D_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \partial_2 - i\partial_3 & -\partial_1 \\ -\partial_1 & -\partial_2 - i\partial_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{00} & D_{01} \\ D_{10} & D_{11} \end{pmatrix}.$$

Notons que pour une application  $\varphi : B \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ , où  $B$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ , la matrice  $(D_{AB}\varphi)$  est maintenant symétrique. Comme dans les cas précédents,  $\varphi$  est semi-conforme si et seulement si  $\det D_{AB}\varphi = 0$ , si et seulement si  $D_{AB}\varphi = \xi_A \xi_B$  pour un champ spinoriel  $\xi_A$  défini dans  $B$ . Par analogie avec le théorème 2.2.1, on obtient la caractérisation suivante des morphismes harmoniques définis sur un domaine de  $\mathbb{R}^3$ .

**Théorème 2.2.3.** *Il existe une correspondance entre les morphismes harmoniques  $\varphi : B \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ , où  $B$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  et un champ spinoriel  $\xi^A$  qui satisfait :*

$$D_{AB}\xi^A\xi^C = 0$$

Les morphismes harmoniques définis sur un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  sont donnés localement par l'équation

$$\alpha_1(\varphi(x))x^1 + \alpha_2(\varphi(x))x^2 + \alpha_3(\varphi(x))x^3 = 1,$$

où  $\alpha = (1/2h)(1 - g^2, i(1 + g^2), -2g)$  avec  $f$  et  $g$  deux fonctions méromorphes définies sur un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Dans ce cas, on trouve :

$$\xi_A = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}\alpha' . x}} \left( \frac{1}{\sqrt{h}}, \frac{g}{\sqrt{h}} \right).$$

On introduit la notation que l'on va utiliser dans la suite. On pose  $u = x_1$  et  $q = x_2 + ix_3$ , alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial q} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} - i \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{q}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} + i \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \\ \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial x_1} \end{cases}$$

et l'opérateur différentiel  $D_{AB}$  s'écrit alors sous la forme :

$$D_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2\partial_q & -\partial_u \\ -\partial_u & -2\partial_{\bar{q}} \end{pmatrix}$$

**Lemme 2.2.1.** *Soit  $B$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ . On suppose qu'il existe une application,  $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $C^\infty$ , alors les deux affirmations suivantes sont équivalentes :*

1.  $\varphi$  est semi-conforme.

2.  $\det(D_{AB}\varphi)$  est nul, ce qui est équivalent à  $D_{AB}\varphi = \xi_A\xi_B$  pour un champ spinoriel  $\xi_A$  dans  $A$ .

Dans ce cas,  $[\xi_A] \in \mathbb{CP}^1 \cong S^2$  correspond à  $U$ , vecteur tangent aux fibres de  $\varphi$ .

**Preuve** si l'application  $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$  est semi-conforme, alors  $\sum_{j=1}^3 (\frac{\partial \varphi}{\partial x_j})^2 = 0$ , ce qui montre que le déterminant de  $D_{AB}\varphi$  est nul, d'où  $D_{AB}\varphi = \xi_A\xi_B$  pour un champ spinoriel  $\xi^A$ . On en déduit que

$$D_{AB}\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \partial_2\varphi - i\partial_3\varphi & -\partial_1\varphi \\ -\partial_1\varphi & -\partial_2\varphi - i\partial_3\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0^2 & \xi_0\xi_1 \\ \xi_1\xi_0 & \xi_1^2 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \partial_1\varphi &= -D_{01} = -\sqrt{2}\xi_0\xi_1 \\ \partial_2\varphi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(D_{00} - D_{11}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_0^2 - \xi_1^2) \\ \partial_3\varphi &= \frac{i}{\sqrt{2}}(D_{00} + D_{11}) = \frac{i}{\sqrt{2}}(\xi_0^2 + \xi_1^2). \end{aligned}$$

On identifie un point  $[\xi_0, \xi_1] \in \mathbb{CP}^1$  avec le point  $\sigma^{-1}(\frac{\xi_1}{\xi_0})$  de  $S^2$ , où  $\sigma : S^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \infty$  est la projection stéréographique. Explicitement

$$[\frac{\xi_1}{\xi_0}] \rightarrow \frac{1}{1+|\frac{\xi_1}{\xi_0}|^2} (1 - |\frac{\xi_1}{\xi_0}|^2, 2\frac{\xi_1}{\xi_0}) = \frac{1}{|\xi_0|^2 + |\xi_1|^2} (|\xi_0|^2 - |\xi_1|^2, \bar{\xi}_0\xi_1 + \xi_0\bar{\xi}_1, -i(\bar{\xi}_0\xi_1 - \xi_0\bar{\xi}_1)) = U.$$

Un simple calcul nous montre que

$$U \cdot \text{grad}\varphi = 0,$$

où  $\text{grad}\varphi = (\partial_1\varphi, \partial_2\varphi, \partial_3\varphi)$  est le gradient de  $\varphi$ , ce qui montre que  $d\varphi(U) = 0$  et  $U$  est tangent aux fibres de  $\varphi$ .  $\square$

Dans la suite, on note :

$$\mu = \frac{\xi_1}{\xi_0}.$$

Donc  $\mu$  représente la direction  $U \in S^2$  tangent aux fibres d'une application semi-conforme  $\varphi : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ , dans la carte donnée par la projection stéréographique :  $\mu = \sigma(U)$ .



## 2.3 Correspondance twistorielle

Dans le premier chapitre, on a donné un exemple d'un morphisme harmonique : la fibration de Hopf définie sur  $\mathbb{CP}^3$  à valeurs dans  $\mathbb{HP}^1 \cong S^4$  où  $\mathbb{H}$  est l'espace des quaternions. Cette application est donnée par :

$$\pi([f, g, h, k]) = [f + gj, h + kj]$$

où on identifie l'ensemble des quaternions  $\mathbb{H}$  avec  $\{z + jw : z, w \in \mathbb{C}, ij = -ji, j^2 = -1\}$ . Soit  $S^3 \subset S^4$ , où  $S^3 = (0, x_1, x_2, x_3) \subset S^4$ ,  $\mathcal{N}^5 \subset \mathbb{CP}^3$  l'image inverse de  $S^3$  par la fibration de Hopf,  $\mathcal{N}^5 = \pi^{-1}(S^3)$ , alors  $[f, g, h, k] \in \mathcal{N}^5$  si et seulement si  $Re\{\bar{h}f + k\bar{g} + (\bar{h}g - k\bar{f})j\} = 0$  c'est-à-dire, si et seulement si

$$(2.1) \quad \bar{h}f + k\bar{g} + h\bar{f} + \bar{k}g = 0.$$

### 2.3.1 Rayon de lumière

Dans l'espace de Minkowski, un vecteur  $v \in \mathbb{M}$  est un rayon de lumière si ses composantes vérifient :

$$-v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 0.$$

**Lemme 2.3.1.** *Soit  $v \in \mathbb{M}$  un rayon de lumière, alors*

$$v^{AA'} = \lambda \rho^A \bar{\rho}^{A'},$$

*Pour un certain spineur  $\rho^A$ .*

**Preuve** En effet, le fait que  $(v^a) = (v^0, v^1, v^2, v^3)$  soit un rayon de lumière revient à dire que  $(v^{AA'})$  est de déterminant nul ; d'où  $(v^{AA'}) = \rho^A \sigma^{A'}$  pour des spineurs  $\rho^A$  et  $\sigma^{A'}$ .

Or  $(v^a)$  est un vecteur de l'espace réel  $\mathbb{M}$ , dont les coordonnées sont des nombres réels, alors  $V = (v^{AA'})$  est une matrice hermitienne, c'est-à-dire que  $\bar{V}^t = V$ ,

$$(2.2) \quad (v^{AA'}) \text{ est hermitienne} \leftrightarrow \left. \begin{array}{ll} \overline{\rho^0 \sigma^{0'}} = \rho^0 \sigma^{0'} & (i) \\ \overline{\rho^1 \sigma^{1'}} = \rho^1 \sigma^{1'} & (ii) \\ \overline{\rho^0 \sigma^{1'}} = \rho^1 \sigma^{0'} & \\ \overline{\rho^1 \sigma^{0'}} = \rho^0 \sigma^{1'} & \end{array} \right\}$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^{1'}}{\sigma^{0'}} &= \frac{\overline{\rho^{1'}}}{\overline{\rho^{0'}}} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma^{0'} \\ \sigma^{1'} \end{pmatrix} &= \lambda \begin{pmatrix} \overline{\rho^0} \\ \overline{\rho^1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc, en utilisant 2.2(i),  $\overline{\rho^0} \bar{\lambda} \rho^0 = \rho^0 \lambda \overline{\rho^0}$ , d'où  $\lambda$  est réel (si  $\rho^0 \neq 0$ , sinon on utilise (ii)), d'où

$$v^{AA'} = \lambda \rho^A \bar{\rho}^{A'}.$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\bar{\rho}^{A'} = \left( \frac{\rho^0}{\rho^1} \right)$ .

Comme dans le lemme 2.2.1, la direction du rayon est donnée par  $U = \sigma^{-1} \left( \frac{\rho^1}{\rho^0} \right)$ , où  $\sigma : S^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  est la projection stéréographique.  $\square$

**Lemme 2.3.2.** *Soit  $\xi_A$  un spineur non-nul,  $(x^a)$  un élément non nul de l'espace de Minkowski  $\mathbb{M}$  et  $(x^{AA'})$  son identification spinorielle, alors :  $\xi_A x^{AA'} = 0$  si et seulement s'il existe un spineur dual  $\sigma^{A'}$  tel que  $x^{AA'} = \xi^A \sigma^{A'}$ .*

**Preuve** On sait que  $\xi_A x^{AA'} = 0$  si et seulement si

$$\begin{cases} \xi_0 x^{00'} + \xi_1 x^{10'} = 0 \\ \xi_0 x^{01'} + \xi_1 x^{11'} = 0 \end{cases}$$

Puisque  $(x^{AA'}) \neq 0$ , on peut supposer par exemple que la composante  $x^{10'} \neq 0$ , d'où

$$\frac{x^{00'}}{x^{10'}} = \frac{x^{01'}}{x^{11'}} = -\frac{\xi_1}{\xi_0} = \frac{\xi^0}{\xi^1}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{pmatrix} x^{00'} \\ x^{10'} \end{pmatrix} = \sigma^{0'} \begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} x^{01'} \\ x^{11'} \end{pmatrix} = \sigma^{1'} \begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \end{pmatrix}$$

pour des nombres  $\sigma^{0'}, \sigma^{1'} \in \mathbb{C}$ , d'où

$$x^{AA'} = \xi^A \sigma^{A'}.$$

$\square$

### 2.3.2 Espace twistoriel

L'espace twistoriel est l'espace  $\mathbb{T} = \mathbb{C}^4$  muni des coordonnées  $(\xi_A, \eta^{A'})$ . La relation d'incidence

$$(2.3) \quad \xi_A = i x_{AA'} \eta^{A'}$$

donne le lien entre les points  $(x^{AA'})$  (éventuellement complexes) de l'espace de Minkowski et l'espace twistoriel projectivisé  $\mathbb{CP}^3$ . On observe que si  $x^{AA'}$  est une solution de (2.3), alors il en est de même pour  $y^{AA'} = x^{AA'} + \lambda \xi^A \bar{\xi}^{A'}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ce qui représente la géodésique isotrope passant par  $x^{AA'}$  et de direction  $[\xi^A] \in \mathbb{CP}^1$ .

Dans  $\mathbb{T} = \mathbb{C}^4$ , on écrit un point sous la forme  $X^\alpha = (\xi_A, \eta^{A'})$ , et son élément conjugué dans l'espace twistoriel dual par :  $\bar{X}_\alpha = (\bar{\eta}^A, \bar{\xi}_{A'})$ .

De façon que :

$$(2.4) \quad \bar{X}_0 = \overline{X^2}, \quad \bar{X}_1 = \overline{X^3}, \quad \bar{X}_2 = \overline{X^0}, \quad \bar{X}_3 = \overline{X^1}$$

**Définition 2.3.1.** Soit  $X^\alpha = (\xi_A, \eta^{A'})$  et  $L^\alpha = (\lambda_A, \nu^{A'})$  deux éléments de l'espace twistoriel. Soit  $\bar{L}_\alpha = (\bar{\nu}^A, \bar{\lambda}_{A'})$  le twisteur dual de  $L^\alpha = (\lambda_A, \nu^{A'})$ . Alors on définit le produit d'un twisteur et d'un twisteur dual comme ceci :

$$X^\alpha \bar{L}_\alpha = \xi_A \bar{\nu}^A + \eta^{A'} \bar{\lambda}_{A'}.$$

On va pouvoir ensuite donner la correspondance entre un rayon de lumière de l'espace de Minkowski et un point dans l'espace des twisteurs.

**Lemme 2.3.3.** Soit  $X^\alpha = (\xi_A, \eta^{A'})$  un twisteur avec  $\eta^{A'} \neq 0$ , alors  $X^\alpha$  définit un rayon de lumière si et seulement si

$$(2.5) \quad X^\alpha \bar{X}_\alpha = 0.$$

**Preuve** L'équation (2.3) possède une solution réelle si et seulement si elle admet une solution  $x^{AA'}$  qui est hermitienne. Dans ce cas, l'équation conjuguée prend la forme

$$\bar{\xi}_A = -i \overline{x_{AA'} \eta^{A'}}$$

où  $(\overline{x_{AA'}})^T = x_{AA'}$ . On obtient alors le système :

$$\begin{cases} x_{00'} \eta^{0'} + x_{01'} \eta^{1'} = -i \xi_0 \\ x_{10'} \eta^{0'} + x_{11'} \eta^{1'} = -i \xi_1 \\ x_{00'} \overline{\eta^{0'}} + x_{10'} \overline{\eta^{1'}} = i \bar{\xi}_0 \\ x_{01'} \overline{\eta^{0'}} + x_{11'} \overline{\eta^{1'}} = i \bar{\xi}_1 \end{cases}$$

C'est un système linéaire de la forme  $A\vec{x} = \vec{b}$  où  $\det A = 0$ , donc par la règle de Cramer, il existe une solution si et seulement si le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant une des colonnes de  $A$  par  $\vec{b}$  s'annule, c'est-à-dire que si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} \eta^{0'} & \eta^{1'} & 0 & -\xi_0 \\ 0 & 0 & \eta^{0'} & -\xi_1 \\ \overline{\eta^{0'}} & 0 & \overline{\eta^{1'}} & \bar{\xi}_0 \\ 0 & \overline{\eta^{0'}} & 0 & \bar{\xi}_1 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui est équivalent à l'équation

$$\xi_0 \overline{\eta^{0'}} + \xi_1 \overline{\eta^{1'}} + \eta^{0'} \bar{\xi}_0 + \eta^{1'} \bar{\xi}_1 = 0$$

qui n'est autre que la condition (2.5). Réciproquement, en inversant les arguments ci-dessus, on voit que si (2.5) est vérifié, alors (2.3) admet une famille de solutions réelles de la forme  $x^{AA'} + \lambda \xi^A \bar{\xi}^{A'}$ .  $\square$

*Conclusion :* Afin de compléter la correspondance en admettant des twisteurs de type  $X^\alpha = (\xi_A, 0)$ , il faut compactifier l'espace de Minkowski en ajoutant un cône de lumière à l'infini pour obtenir l'espace compact  $\mathbb{M}^C$  homéomorphe à  $S^1 \times S^3$  [23]. Avec cette compactification, en notant que l'équation (2.5) n'est autre que la condition (2.1), on obtient une correspondance entre un point de l'espace  $\mathcal{N}^5 \subset \mathbb{CP}^3$  et un rayon de lumière dans  $\mathbb{M}^C$ , c'est-à-dire que

$$\mathbb{CP}^3 \supset \mathcal{N}^5 = \{\text{les rayons de lumières dans } \mathbb{M}^C\}.$$

### 2.3.3 Surface twistorielle

Soit  $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}P^3$  une surface complexe régulière, c'est-à-dire que  $\mathcal{S}$  localement paramétrée sous la forme  $(z, w) \rightarrow [\xi_A(z, w), \eta^{A'}(z, w)]$ , où  $\xi_A(z, w)$ ,  $\eta^{A'}(z, w)$  ( $A, A' \in \{0, 1\}$ ) sont des fonctions holomorphes en  $(z, w)$  et les vecteurs  $(\frac{\partial \xi_A}{\partial z}, \frac{\partial \eta^{A'}}{\partial z})$ ,  $(\frac{\partial \xi_A}{\partial w}, \frac{\partial \eta^{A'}}{\partial w}) \in \mathbb{C}^4$  sont indépendants pour chaque  $(z, w)$ . On appelle cette surface *surface twistorielle*.

**Lemme 2.3.4.** *Soit  $(z, w) \rightarrow [\xi_A(z, w), \eta^{A'}(z, w)]$  une paramétrisation d'une surface twistorielle  $\mathcal{S}$ , telle que  $\eta^{1'}(z, w) \neq 0$  pour tout  $z, w$ . Alors il existe une paramétrisation de la forme  $\tilde{z} = \tilde{z}(z, w)$  et  $\tilde{w} = \tilde{w}(z, w)$  par rapport à laquelle  $\mathcal{S}$  est donnée par*

$$(\tilde{z}, \tilde{w}) \rightarrow [\xi_0(\tilde{z}, \tilde{w}), \xi_1(\tilde{z}, \tilde{w}), \tilde{z}, 1].$$

**Preuve** D'abord on divise par  $\eta^{1'}$ , afin d'obtenir une paramétrisation de  $\mathcal{S}$  sous la forme

$$(z, w) \rightarrow [\xi_0(z, w), \xi_1(z, w), \eta^{0'}(z, w), 1].$$

On cherche alors, une transformation biholomorphe  $\tilde{z} = \tilde{z}(z, w)$ ,  $\tilde{w} = \tilde{w}(z, w)$  telle que

$$\frac{\partial \eta^{0'}}{\partial \tilde{w}} = \frac{\partial \eta^{0'}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \tilde{w}} + \frac{\partial \eta^{0'}}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial \tilde{w}} = 0.$$

Par l'hypothèse de régularité,

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_0}{\partial z} & \frac{\partial \xi_1}{\partial z} & \frac{\partial \eta^{0'}}{\partial z} \\ \frac{\partial \xi_0}{\partial w} & \frac{\partial \xi_1}{\partial w} & \frac{\partial \eta^{0'}}{\partial w} \end{pmatrix} = 2$$

d'où

$$\text{soit } \begin{vmatrix} \frac{\partial \eta^{0'}}{\partial z} & \frac{\partial \eta^{0'}}{\partial w} \\ \frac{\partial \xi_0}{\partial z} & \frac{\partial \xi_0}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{soit } \begin{vmatrix} \frac{\partial \eta^{0'}}{\partial z} & \frac{\partial \eta^{0'}}{\partial w} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial z} & \frac{\partial \xi_1}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Supposons que  $\begin{vmatrix} \frac{\partial \eta^{0'}}{\partial z} & \frac{\partial \eta^{0'}}{\partial w} \\ \frac{\partial \xi_0}{\partial z} & \frac{\partial \xi_0}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$ , l'autre cas étant similaire.

On définit l'application  $\psi : (z, w) \rightarrow (\tilde{z} = \eta^{0'}(z, w), \tilde{w} = \xi_0(z, w))$ . Alors, puisque  $\begin{vmatrix} \frac{\partial \eta^{0'}}{\partial z} & \frac{\partial \eta^{0'}}{\partial w} \\ \frac{\partial \xi_0}{\partial z} & \frac{\partial \xi_0}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$ , on peut localement trouver une réciproque de  $\psi$ ; afin d'exprimer  $z = z(\tilde{z}, \tilde{w})$ ,  $w = w(\tilde{z}, \tilde{w})$ . Par construction

$$\frac{\partial \eta^{0'}}{\partial \tilde{w}} = \frac{\partial \eta^{0'}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \tilde{w}} + \frac{\partial \eta^{0'}}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial \tilde{w}} = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \tilde{w}} + \frac{\partial \tilde{z}}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial \tilde{w}} = \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tilde{w}} = 0.$$

Enfin, par la régularité encore,  $\eta^{0'}(\tilde{z})$  est non-constante et on peut la remplacer par  $\tilde{z}$  dans un voisinage d'un point où  $\eta^{0'}(\tilde{z}) \neq 0$ . □

**Théorème 2.3.1.** *Soit  $\mathcal{S} \subset \mathbb{CP}^3$  une surface twistorielle munie d'une paramétrisation  $(z, w) \rightarrow [\xi_A(z, w), \eta^{A'}(z, w)]$  et soit*

$$(2.6) \quad \xi_A = ix_{AA'}\eta^{A'}$$

*la relation d'incidence. Alors, toute solution  $z = z(x)$  ( $x \in \mathbb{M}$ ) de l'équation (2.6) est solution isotrope de l'équation des ondes  $\square z = 0$  si et seulement si  $\frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{\eta^{0'}}{\eta^{1'}} \right) = 0$ . En particulier, toute surface twistorielle admet de telles paramétrisations et donc détermine une solution isotrope de l'équation des ondes.*

**Preuve** En posant  $u = x^0 + x^1$ ,  $v = x^0 - x^1$  et  $q = x^2 + ix^3$ ,

La relation d'incidence :

$$\xi_A = ix_{AA'}\eta^{A'}$$

s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{cases} -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_0 = u\eta^{0'} + q\eta^{1'} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_1 = \bar{q}\eta^{0'} + v\eta^{1'} \end{cases}$$

Soit  $r(z, w, x) := u\eta^{0'} + q\eta^{1'} + i\xi_0 = 0$  et  $s := \bar{q}\eta^{0'} + v\eta^{1'} + \xi_1 = 0$ .

En dérivant par rapport à  $u$  les deux équations on obtient

$$\frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{s_w\eta^{0'}}{\{r, s\}}$$

avec

$$s_w = \frac{\partial s}{\partial w}$$

et  $\{r, s\} = r_z s_w - s_z r_w$ .

En dérivant par rapport à  $v$ ,  $q$  et  $\bar{q}$  respectivement, on obtient

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{r_w\eta^{1'}}{\{r, s\}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial q} = -\frac{s_w\eta^{1'}}{\{r, s\}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{q}} = \frac{r_w\eta^{0'}}{\{r, s\}}.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial q} \frac{\partial z}{\partial \bar{q}} = 0.$$

Rappelons le d'Alembertien

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 z}{\partial q \partial \bar{q}} = \frac{1}{4} \square z.$$

On calcule les dérivées secondes de  $z$  en dérivant les équations  $r = 0, s = 0$  implicitement une deuxième fois. Le calcul étant assez long on omet les détails. En effet on obtient  $\square z = 0$  si et seulement si  $\{r, s\}(\eta^{1'} \partial_w \eta^{0'} - \eta^{0'} \partial_w \eta^{1'}) = 0$ , ce qui démontre le théorème.  $\square$

Pour faire le lien avec la section 2.2.2, on obtient la décomposition spinorielle de  $z$

$$\nabla_{AA'} z = \frac{\sqrt{2}}{\{r, s\}} \begin{pmatrix} -s_w \eta^{0'} & -s_w \eta^{1'} \\ r_w \eta^{0'} & r_w \eta^{1'} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{\{r, s\}} \begin{pmatrix} -s_w \\ r_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^{0'} & \eta^{1'} \end{pmatrix}$$

$$\text{i.e. } \nabla_{AA'} z = \xi_A \eta_{A'} \text{ où } \rho_{A'} = \frac{\sqrt{2}}{\{r, s\}} \begin{pmatrix} -s_w \\ r_w \end{pmatrix}$$

**Exemple 2.3.1.** On considère la surface twistorielle paramétrée par  $(z, w) \rightarrow (cz, w, z, 1)$ , où  $c \in \mathbb{C}$ , alors la relation d'incidence s'écrit :

$$(2.7) \quad \begin{cases} -i\sqrt{2}cz = zu + q \\ -i\sqrt{2}w = z\bar{q} + v. \end{cases}$$

Alors

$$z = \frac{-q}{u + i\sqrt{2}c},$$

est solution isotrope de l'équation des ondes.

### 2.3.4 Congruence de rayons de lumière sans cisaillement

On considère l'espace de Minkowski  $\mathbb{M}$ . Par une tranche  $\mathbb{R}_t^3$ , on comprend un hyperplan :  $t = \text{constante}$ . Rappelons qu'un vecteur  $w \in T_x \mathbb{M}$  s'appelle vecteur isotrope si  $g(w, w) = 0$  où  $g$  est la métrique canonique de  $\mathbb{M}$ . Il engendre un sous-espace de dimension 1 appelé rayon de lumière. On peut normaliser  $w$  pour qu'il prenne la forme  $w = \frac{\partial}{\partial t} + U$  où  $U$  est un vecteur unitaire dans  $T_x \mathbb{R}_t^3$  ( $x = (t, x_1, x_2, x_3)$ ). Soit  $l$  un feuilletage  $C^\infty$  de rayons de lumière d'un ouvert  $A \subset \mathbb{M}$ , appelé congruence de rayons de lumière, et soit  $w = \frac{\partial}{\partial t} + U$  le champ tangent associé. Alors la distribution orthogonale  $w^\perp$  est de dimension 3 et contient  $w$ . On choisit un complément  $\Sigma$  de  $w$  dans  $w^\perp$  ; un tel espace s'appelle le "screen space", et un choix convenable est donné par  $\Sigma = U^\perp(x) \cap \mathbb{R}_t^3$  en chaque  $x = (t, x_1, x_2, x_3) \in A$ . Alors la congruence  $l$  est dite sans cisaillement, ou shear free si et seulement si le transport de Lie le long de  $w$  des vecteurs de  $\Sigma$  est conforme ; ce qui se traduit par la condition :

$$(\mathcal{L}_U g)(X, Y) = ag(X, Y)$$

pour une fonction  $a : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X$  et  $Y$  sont deux vecteurs quelconques dans  $\Sigma = U^\perp \cap \mathbb{R}_t^3$ . Autrement dit, la congruence  $l$  est sans cisaillement si et seulement si le champ de vecteurs  $U$  est tangent à un feuilletage conforme dans  $\mathbb{R}_t^3$  pour chaque  $t$ , c'est-à-dire que localement,  $U$  est tangent aux fibres d'une submersion semi-conforme. Dans la suite on abrège la phrase congruence de rayons de lumière sans cisaillement par SFR (shear free ray congruence). Étant donnée une congruence de rayons de lumière  $l$  avec champ tangent  $w$ , on peut associer un champ spinoriel  $\xi^A$  par la correspondance  $w^a \leftrightarrow w^{AA'} = \xi^A \bar{\xi}^{A'}$ . Il s'ensuit que  $l$  est sans cisaillement si et seulement si

$$(2.8) \quad \xi^A \xi^B \nabla_{AA'} \xi_B = 0.$$

On note que cette équation ne dépend que de la direction  $\xi^0/\xi^1$ . En effet, en écrivant  $\xi = \xi^0/\xi^1$ , l'équation (2.8) est équivalente à :

$$\begin{cases} \xi \nabla_{00'} \xi + \nabla_{10'} \xi = 0 \\ \xi \nabla_{01'} \xi + \nabla_{11'} \xi = 0. \end{cases}$$

## 2.4 Intégrabilité des champs spinoriels

On a vu que si  $\varphi : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  est semi-conforme alors il existe un champ spinoriel  $\mu_A$  dans  $A$  tel que  $D_{AB}\varphi = \mu_A \mu_B$ . Réciproquement, on veut savoir, donné un champ de spinoriel  $\mu_A$ , quand est-ce que  $\mu_A \mu_B$  est intégrable, c'est-à-dire, quand existe-t-il une application  $\varphi$  semi-conforme telle que  $D_{AB}\varphi = \mu_A \mu_B$ .

Soit  $v^a = (v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{R}^3$ , et soit la correspondance spinorielle suivante

$$v^a \leftrightarrow v^{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^2 + iv^3 & -v^1 \\ -v^1 & -v^2 + iv^3 \end{pmatrix}$$

soit  $D_{AB}$  l'opérateur défini comme dans le paragraphe 2.2.3, alors

$$D^{AB} = \varepsilon^{AC} \varepsilon^{BD} D_{CD}.$$

Ce qui montre que

$$D^{00} = D_{11}, \quad D^{11} = D_{00}, \quad D^{10} = -D_{01} = D^{01}$$

D'où

$$D^{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\partial_2 - i\partial_3 & \partial_1 \\ \partial_1 & \partial_2 - i\partial_3 \end{pmatrix}.$$

Soit maintenant un vecteur  $v^a = (v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{R}^3$ ,  $v_a = v^1 dx^1 + v^2 dx^2 + v^3 dx^3$  sa 1-forme correspondante, alors,

$$dv_a = (\partial_1 v^2 - \partial_2 v^1) dx^1 \wedge dx^2 + (\partial_2 v^3 - \partial_3 v^2) dx^2 \wedge dx^3 + (\partial_1 v^3 - \partial_3 v^1) dx^1 \wedge dx^3.$$

Le lemme suivant est facile à démontrer :

**Lemme 2.4.1.** Soit  $v_a$  une 1-forme définie sur un ouvert simplement connexe  $A$  de  $\mathbb{R}^3$ . Alors :  $dv_a = 0$  si et seulement s'il existe une application semi-conforme  $\varphi : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ , telle que  $D^{AB}\varphi = v^{AB}$ .

**Lemme 2.4.2.** Soit  $v^a$  un champ de vecteurs défini sur un ouvert  $A$  de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $v^{AB} = \mu^A \mu^B$ , alors,

$$D^{C(A}\mu^{B)}\mu_C = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad dv_a = 0.$$

**Preuve**  $\mu^1 = -\mu_0$ ,  $\mu^0 = \mu_1$  et  $v^{AB} = \mu^A \mu^B$ , alors,

$$\begin{aligned} v^2 + iv^3 &= (\mu^0)^1 \\ -v^2 + iv^3 &= (\mu^1)^2 \end{aligned}$$

Donc

$$v^2 = \frac{(\mu^0)^2 - (\mu^1)^2}{2} \quad \text{et} \quad v^3 = \frac{(\mu^0)^2 + (\mu^1)^2}{2i}.$$

Supposons  $D^{C(A}\mu^{B)}\mu_C = 0$ . Alors

$$\begin{aligned} D^{00}\mu^0\mu_0 + D^{10}\mu^0\mu_1 &= -D^{00}\mu^0\mu^1 + D^{10}\mu^0\mu^0 \\ &= (\partial_2 + i\partial_3)\mu^0\mu^1 + \partial_1(\mu^0)^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^{01}\mu^1\mu_0 + D^{11}\mu^1\mu_1 &= -D^{01}\mu^1\mu^1 + D^{11}\mu^1\mu^0 \\ &= -\partial_1(\mu^1)^2 + (\partial_2 - i\partial_3)\mu^0\mu^1 = 0 \end{aligned}$$

$$D^{00}\mu^1\mu_0 + D^{10}\mu^1\mu_1 + D^{01}\mu^0\mu_0 + D^{11}\mu^0\mu_1 = (\partial_2 + i\partial_3)(\mu^1)^2 + (\partial_2 - i\partial_3)(\mu^0)^2 = 0$$

D'autre part

$$dv_a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_1\left(\frac{(\mu^0)^2 - (\mu^1)^2}{2}\right) + \partial_2(\mu^0\mu^1) = 0 \\ \partial_1\left(\frac{(\mu^0)^2 + (\mu^1)^2}{2i}\right) + \partial_3(\mu^0\mu^1) = 0 \\ \partial_2\left(\frac{(\mu^0)^2 + (\mu^1)^2}{2i}\right) - \partial_3\left(\frac{(\mu^0)^2 - (\mu^1)^2}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\text{ce qui revient à dire que : } \begin{cases} \partial_1(\mu^0)^2 + (\partial_2 + i\partial_3)\mu^0\mu^1 = 0 \\ -\partial_1(\mu^1)^2 + (\partial_2 - i\partial_3)\mu^0\mu^1 = 0 \\ (\partial_2 + i\partial_3)(\mu^1)^2 + (\partial_2 - i\partial_3)(\mu^0)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow D^{C(A}\mu^{B)}\mu_C = 0.$$

□

On en déduit que pour une application  $\varphi : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $A$  étant un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\varphi$  est semi-conforme avec  $D_{AB}\varphi = \mu_A\mu_B$  pour un champ spinoriel  $\mu_A \in A$ , si et seulement si  $\mu_A$  vérifie l'équation suivante :

$$D^{C(A}\mu^{B)}\mu_C = 0.$$



## 2.5 Les solutions isotropes de l'équation des ondes

On étudie les fonctions  $f : A \subset \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $A$  ouvert de  $\mathbb{M}$ , vérifiant les deux équations :

$$(2.9) \quad \begin{cases} (\partial_t f)^2 - (\partial_1 f)^2 - (\partial_2 f)^2 - (\partial_3 f)^2 = 0 \\ \partial_{tt}^2 f - \partial_{11}^2 f - \partial_{22}^2 f - \partial_{33}^2 f = 0. \end{cases}$$

On appelle une telle fonction "solution isotrope" de l'équation des ondes. En effet, la deuxième équation est l'équation des ondes et la première est une condition d'isotropie sur le gradient complexe  $\text{grad}_{\mathbb{M}} f$ .

**Théorème 2.5.1.** 1. Soit  $f : A \subset \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $C^2$  qui est solution isotrope de l'équation des ondes (2.9). Alors, il existe une paire de champs spinoriels  $\xi_A, \eta_{A'}$  telle que  $\nabla_{AA'} f = \xi_A \eta_{A'}$  et qui vérifient

$$(2.10) \quad \nabla_{AA'} \xi^B \eta^{A'} = \nabla_{AA'} \xi^A \eta^{B'} = 0.$$

Réciproquement, toute paire de champs spinoriels  $\xi_A, \eta_{A'}$  vérifiant (2.10), détermine une solution de (2.9).

2. Soit  $f$  une solution de (2.9) et on suppose que  $df$  soit non-nulle en tout point, alors les seuls champs isotropes dans  $\ker df$  sont donnés par

$$\lambda \rightarrow \lambda \xi^A \bar{\xi}^{A'} \text{ et } \mu \rightarrow \mu \bar{\eta}^A \eta^{A'} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}),$$

et au moins un de ces champs est tangent à une SFR. Réciproquement, soit  $\xi$  tangent à une SFR. On définit  $\xi^0 = \xi$ ,  $\xi^1 = 1$ ,  $\eta^{0'} = -\nabla_{01'} \xi$ ,  $\eta^{1'} = \nabla_{00'} \xi$ . Alors  $\xi^A \eta^{A'}$  détermine une solution de (2.9).

Afin de montrer notre théorème, on va démontrer les lemmes suivants. On note que d'après le lemme 2.3.1, pour tout rayon de lumière  $v \in \mathbb{M}$ , il existe un certain spineur  $\rho^A$  pour lequel  $v^{AA'} = \lambda \rho^A \bar{\rho}^{A'}$ , où  $v^{AA'}$  est la reformulation spinorielle de  $v$ .

**Lemme 2.5.1.** Soit  $f : A \subset \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $C^2$  qui est solution isotrope de l'équation des ondes (2.9). Alors il existe une paire de champs spinoriels  $\xi^A, \eta^{A'}$  telle que  $\nabla_{AA'} f = \xi_A \eta_{A'}$ . De plus, si  $v^{AA'} = \lambda \rho^A \bar{\rho}^{A'}$  est un rayon de lumière dans  $\ker df$ , alors,

- Ou bien  $\rho^A = \alpha \xi^A$ ,
- Ou bien  $\rho^A = \beta \bar{\eta}^A$  ( $= \beta \bar{\eta}^A$ ), avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .

**Preuve** La fonction  $f$  est solution isotrope de (2.9), et en particulier, une fonction semi-conforme ; alors  $\det(\nabla_{AA'} f) = 0$ , ce qui montre qu'il existe deux champs spinoriels  $\xi_A, \eta_{A'}$

tels que  $\nabla_{AA'}f = \xi_A\eta_{A'}$ . Supposons que le rayon de lumière  $v^{AA'}$  est dans  $\ker df$ , alors :

$$\begin{aligned}
\nabla_{AA'}f v^{AA'} = 0 &\Leftrightarrow \xi_A\eta_{A'}\rho^A\bar{\rho}^{A'} = 0 \\
&\Leftrightarrow \xi_0\eta_{0'}\rho^0\bar{\rho}^{0'} + \xi_0\eta_{1'}\rho^0\bar{\rho}^{1'} + \xi_1\eta_{0'}\rho^1\bar{\rho}^{0'} + \xi_1\eta_{1'}\rho^1\bar{\rho}^{1'} = 0 \\
&\Leftrightarrow \xi_0\eta_{0'}|\rho^1|^2 - \xi_0\eta_{1'}\rho_1\bar{\rho}_0 - \xi_1\eta_{0'}\rho_0\bar{\rho}_1 + \xi_1\eta_{1'}|\rho_0|^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \eta_{0'}(\xi_0|\rho_1|^2 - \xi_1\rho_0\bar{\rho}_1) + \eta_{1'}(\xi_1|\rho_0|^2 - \xi_0\rho_1\bar{\rho}_0) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\eta_{0'}}{\eta_{1'}} = \frac{\xi_0\rho_1\bar{\rho}_0 - \xi_1|\rho_0|^2}{\xi_0|\rho_1|^2 - \xi_1\rho_0\bar{\rho}_1} = \frac{[\frac{\xi_0}{\xi_1}\rho_1 - \rho_0]\bar{\rho}_0}{[\frac{\xi_0}{\xi_1}\rho_1 - \rho_0]\bar{\rho}_1} \\
&\Leftrightarrow \frac{\eta_{0'}}{\eta_{1'}}[\frac{\xi_0}{\xi_1} - \frac{\rho_0}{\rho_1}] = \frac{\bar{\rho}_0}{\bar{\rho}_1}[\frac{\xi_0}{\xi_1} - \frac{\rho_0}{\rho_1}].
\end{aligned}$$

Alors :

1. Soit

$$[\frac{\xi_0}{\xi_1} - \frac{\rho_0}{\rho_1}] = 0,$$

i.e.  $\rho_A = \alpha\xi_A$ ,

2. Soit

$$\frac{\eta_{0'}}{\eta_{1'}} = \frac{\bar{\rho}_0}{\bar{\rho}_1},$$

i.e.  $\rho_A = \beta\bar{\eta}_{A'}$ .

□

En notant par  $v = v^0\partial_0 + v^1\partial_1 + v^2\partial_2 + v^3\partial_3$  un champ de vecteurs dans  $T\mathbb{M}$ , on va définir les deux quantités suivantes :

$$\begin{aligned}
v_a &= v^0dx^0 + v^1dx^1 + v^2dx^2 + v^3dx^3. \\
dv_a &= (\partial_1v^0 - \partial_0v^1)dx^0 \wedge dx^1 + (\partial_2v^0 - \partial_0v^2)dx^0 \wedge dx^2 + (\partial_3v^0 - \partial_0v^3)dx^0 \wedge dx^3 \\
&\quad + (\partial_2v^1 - \partial_1v^2)dx^1 \wedge dx^2 + (\partial_3v^1 - \partial_1v^3)dx^1 \wedge dx^3 + (\partial_3v^2 - \partial_2v^3)dx^2 \wedge dx^3.
\end{aligned}$$

En général, pour une 1-forme  $\theta = \theta_idx^i$ , on a :

$$\operatorname{div} \theta = -d^*\theta = g^{ij}\partial_i\theta_j.$$

Donc dans l'espace de Minkowski  $\mathbb{M}$  :  $\operatorname{div} \theta = \partial_0\theta_0 - \partial_1\theta_1 - \partial_2\theta_2 - \partial_3\theta_3$ . Cela veut dire que pour  $v_a = df = \partial_ifdx^i$ , on a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} df &= \partial_{00}^2f - \partial_{11}^1f - \partial_{22}^2f - \partial_{33}^2f \\
&= \partial_0v^0 - \partial_1v^1 - \partial_2v^2 - \partial_3v^3.
\end{aligned}$$

Le lemme de Poincaré prend la forme suivante

**Lemme 2.5.2.** Soit  $v_a$  une 1-forme sur un ouvert simplement connexe  $A \subset \mathbb{M}$ , alors :  $dv_a = 0$  si et seulement si il existe une fonction  $f : A \subset \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $\nabla^{AA'}f = v^{AA'}$ .

On note que,  $\nabla^{AA'}$  est donnée par :

$$\nabla^{AA'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \partial_0 - \partial_1 & -\partial_2 + i\partial_3 \\ -\partial_2 - i\partial_3 & \partial_0 + \partial_1 \end{pmatrix}$$

**Lemme 2.5.3.** *Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- a)  $dv_a = 0$  et  $\text{div } v_a = 0$
- b)  $\nabla_{AA'}v^{BA'} = 0$  et  $\nabla_{AA'}v^{AB'} = 0$ .

**Preuve** Supposons d'abord que  $\nabla_{AA'}v^{AB'} = 0$  et  $\nabla_{AA'}v^{BA'} = 0$ . En effet, dans la première équation, pour  $A' = B' = 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \nabla_{00'}v^{00'} + \nabla_{10'}v^{10'} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\partial_0 + \partial_1)(v^0 + v^1) + (\partial_2 - i\partial_3)(v^2 + iv^3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \partial_0v^0 + \partial_0v^1 + \partial_1v^0 + \partial_1v^1 + \partial_2v^2 + \partial_3v^3 + i(\partial_2v^3 - \partial_3v^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \partial_3v^2 - \partial_2v^3 &= 0. \end{aligned}$$

En prenant des valeurs différentes pour  $A'$  et  $B'$  dans les deux équations, on montre que  $dv_a = 0$ . En utilisant le fait que  $\nabla_{AA'}v^{BA'} = 0$ , et en prenant la somme sur  $A = B$  on voit que  $\text{div } v_a = 0$ . Pour montrer la réciproque, on inverse les calculs ci-dessus.  $\square$

Maintenant on va pouvoir montrer notre théorème :

**Preuve** On montre d'abord la première partie du théorème. En effet, si  $f$  est solution isotrope de l'équation des ondes, alors d'après le lemme 2.5.1, il existe deux champs spinoriels  $\xi^A$  et  $\eta^{A'}$  tel que  $\nabla_{AA'}f = \xi_A\eta_{A'}$ . Le fait que ces deux champs vérifient (2.10) est une conséquence du lemme 2.5.3. Réciproquement, si  $\xi_A, \eta_{A'}$  vérifient (2.10), alors d'après les lemmes 2.5.2 et 2.5.3, il existe une fonction  $f$  telle que  $\nabla_{AA'}f = \xi_A\eta_{A'}$  vérifiant (2.9).

On va montrer maintenant la deuxième partie du théorème. Or, la première affirmation de cette partie découle directement du lemme 2.5.1. Il suffit de montrer qu'au moins un de ces champs isotropes est une SFR. Or, d'après la première partie du théorème, on a les deux équations suivantes du théorème :

$$\nabla_{AA'}\xi^B\eta^{A'} = \nabla_{AA'}\xi^A\eta^{B'} = 0$$

qui sont équivalentes à :

$$\begin{aligned} (2.11) \quad & \xi^0\nabla_{00'}\eta^{0'} + \eta^{0'}\nabla_{00'}\xi^0 + \xi^0\nabla_{01'}\eta^{1'} + \eta^{1'}\nabla_{01'}\xi^0 = 0 \\ (2.12) \quad & \xi^1\nabla_{00'}\eta^{0'} + \eta^{0'}\nabla_{00'}\xi^1 + \xi^1\nabla_{01'}\eta^{1'} + \eta^{1'}\nabla_{01'}\xi^1 = 0 \\ (2.13) \quad & \xi^0\nabla_{10'}\eta^{0'} + \eta^{0'}\nabla_{10'}\xi^0 + \xi^0\nabla_{11'}\eta^{1'} + \eta^{1'}\nabla_{11'}\xi^0 = 0 \\ (2.14) \quad & \xi^1\nabla_{10'}\eta^{0'} + \eta^{0'}\nabla_{10'}\xi^1 + \xi^1\nabla_{11'}\eta^{1'} + \eta^{1'}\nabla_{11'}\xi^1 = 0 \\ (2.15) \quad & \xi^0\nabla_{00'}\eta^{0'} + \eta^{0'}\nabla_{00'}\xi^0 + \xi^1\nabla_{10'}\eta^{0'} + \eta^{0'}\nabla_{10'}\xi^1 = 0 \\ (2.16) \quad & \xi^0\nabla_{00'}\eta^{1'} + \eta^{1'}\nabla_{00'}\xi^0 + \xi^1\nabla_{10'}\eta^{1'} + \eta^{1'}\nabla_{10'}\xi^1 = 0 \\ (2.17) \quad & \xi^0\nabla_{01'}\eta^{0'} + \eta^{0'}\nabla_{01'}\xi^0 + \xi^1\nabla_{11'}\eta^{0'} + \eta^{0'}\nabla_{11'}\xi^1 = 0 \\ (2.18) \quad & \xi^0\nabla_{01'}\eta^{1'} + \eta^{1'}\nabla_{01'}\xi^0 + \xi^1\nabla_{11'}\eta^{1'} + \eta^{1'}\nabla_{11'}\xi^1 = 0. \end{aligned}$$

Alors, on multiplie (2.11) par  $\xi^1$  et (2.12) par  $\xi^0$  et en soustrayant on obtient :

$$\eta^{0'} \nabla_{00'} \left( \frac{\xi^0}{\xi^1} \right) + \eta^{1'} \nabla_{01'} \left( \frac{\xi^0}{\xi^1} \right) = 0.$$

En combinant les autres équations en paires on obtient :

$$\begin{aligned} \eta^{0'} \nabla_{10'} \left( \frac{\xi^0}{\xi^1} \right) + \eta^{1'} \nabla_{11'} \left( \frac{\xi^0}{\xi^1} \right) &= 0 \\ \xi^0 \nabla_{00'} \left( \frac{\eta^{0'}}{\eta^{1'}} \right) + \xi^1 \nabla_{10'} \left( \frac{\eta^{0'}}{\eta^{1'}} \right) &= 0 \\ \xi^0 \nabla_{01'} \left( \frac{\eta^{0'}}{\eta^{1'}} \right) + \xi^1 \nabla_{11'} \left( \frac{\eta^{0'}}{\eta^{1'}} \right) &= 0. \end{aligned}$$

On écrit  $\eta = \eta^{0'}/\eta^{1'}$  et  $\xi = \xi^0/\xi^1$ , on obtient alors les équations :

$$\begin{aligned} (2.19) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \eta \nabla_{00'} \xi + \nabla_{01'} \xi = 0 \\ \eta \nabla_{10'} \xi + \nabla_{11'} \xi = 0 \end{array} \right. \\ (2.20) \quad & \\ (2.21) \quad & \left\{ \begin{array}{l} \xi \nabla_{00'} \eta + \nabla_{10'} \eta = 0 \\ \xi \nabla_{01'} \eta + \nabla_{11'} \eta = 0 \end{array} \right. \\ (2.22) \quad & \end{aligned}$$

D'autre part,  $\xi^A$  est tangent à une SFR si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi \nabla_{00'} \xi + \nabla_{10'} \xi = 0 \\ \xi \nabla_{01'} \xi + \nabla_{11'} \xi = 0 \end{array} \right.$$

et  $\eta^{A'}$  est tangent à une SFR si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta \nabla_{00'} \eta + \nabla_{01'} \eta = 0 \\ \eta \nabla_{10'} \eta + \nabla_{11'} \eta = 0 \end{array} \right.$$

On prend la dérivée de (2.19) par rapport à  $\nabla_{11'}$  :

$$\begin{aligned} & \nabla_{11'} \eta \nabla_{00'} \xi + \eta \nabla_{11'} \nabla_{00'} \xi + \nabla_{01'} \nabla_{11'} \xi = 0 \quad (\text{en commutant les dérivées}) \\ \Rightarrow & -\xi \nabla_{01'} \eta \nabla_{00'} \xi + \eta \nabla_{11'} \nabla_{00'} \xi + \nabla_{01'} (-\eta \nabla_{10'} \xi) = 0 \quad (\text{en substituant (2.22) et (2.20)}) \\ \Rightarrow & -\nabla_{01'} \eta (\xi \nabla_{00'} \xi + \nabla_{10'} \xi) + \eta (\nabla_{11'} \nabla_{00'} \xi - \nabla_{01'} \nabla_{10'} \xi) = 0 \end{aligned}$$

On prend la dérivée de (2.19) par rapport à  $\nabla_{10'}$  :

$$\begin{aligned} & \nabla_{10'} \eta \nabla_{00'} \xi + \eta \nabla_{00'} \nabla_{10'} \xi + \nabla_{01'} \nabla_{10'} \xi = 0 \quad (\text{en commutant les dérivées}) \\ \Rightarrow & -\xi \nabla_{00'} \eta \nabla_{00'} \xi - \eta \nabla_{00'} \left( \frac{1}{\eta} \nabla_{11'} \xi \right) + \nabla_{01'} \nabla_{10'} \xi = 0 \quad (\text{en substituant (2.21) et (2.20)}) \\ \Rightarrow & \nabla_{00'} \eta (-\xi \nabla_{00'} \xi + \frac{1}{\eta} \nabla_{11'} \xi) - \nabla_{00'} \nabla_{11'} \xi + \nabla_{01'} \nabla_{10'} \xi = 0 \\ \Rightarrow & \nabla_{00'} \eta (\xi \nabla_{00'} \xi + \nabla_{10'} \xi) + \nabla_{00'} \nabla_{11'} \xi - \nabla_{01'} \nabla_{10'} \xi = 0 \quad (\text{par (2.20)}). \end{aligned}$$

D'où :

$$(2.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\nabla_{01'}\eta(\xi\nabla_{00'}\xi + \nabla_{10'}\xi) + \eta(\nabla_{11'}\nabla_{00'}\xi - \nabla_{01'}\nabla_{10'}\xi) = 0 \\ \nabla_{00'}\eta(\xi\nabla_{00'}\xi + \nabla_{10'}\xi) + \nabla_{11'}\nabla_{00'}\xi - \nabla_{01'}\nabla_{10'}\xi = 0 \end{array} \right.$$

$$(2.24)$$

et :

$$\begin{aligned} \text{soit} \quad & \left| \begin{array}{cc} -\nabla_{01'}\eta & \eta \\ \nabla_{00'}\eta & 1 \end{array} \right| = -\nabla_{01'}\eta - \eta\nabla_{00'}\eta = 0 \\ \text{soit} \quad & \xi\nabla_{00'}\xi + \nabla_{10'}\xi = \nabla_{11'}\nabla_{00'}\xi - \nabla_{01'}\nabla_{10'}\xi = 0. \end{aligned}$$

Maintenant on dérive (2.20) par rapport à  $\nabla_{00'}$  :

$$\begin{aligned} & \nabla_{00'}\eta\nabla_{10'}\xi + \eta\nabla_{10'}\nabla_{00'}\xi + \nabla_{11'}\nabla_{00'}\xi = 0 \quad (\text{en commutant les dérivées}) \\ \Rightarrow & -\frac{1}{\xi}\nabla_{10'}\eta\nabla_{10'}\xi + \eta\nabla_{10'}(-\frac{1}{\eta}\nabla_{01'}\xi) + \nabla_{11'}\nabla_{00'}\xi = 0 \quad (\text{en substituant (2.21) et (2.19)}) \\ \Rightarrow & \nabla_{10'}\eta(-\frac{1}{\xi}\nabla_{10'}\xi + \frac{1}{\eta}\nabla_{01'}\xi) - \nabla_{10'}\nabla_{01'}\xi + \nabla_{11'}\nabla_{00'}\xi = 0 \\ \Rightarrow & \frac{\nabla_{10'}\eta}{\eta}(\frac{1}{\xi}\nabla_{11'}\xi + \nabla_{01'}\xi) + \nabla_{11'}\nabla_{00'}\xi - \nabla_{10'}\nabla_{01'}\xi = 0 \quad \text{par (2.20)}. \end{aligned}$$

On dérive (2.19) par rapport à  $\nabla_{11'}$  (de manière différente) :

$$\begin{aligned} & \nabla_{11'}(-\frac{1}{\eta}\nabla_{01'}\xi) + \eta\nabla_{11'}\nabla_{00'}\xi + \nabla_{01'}(-\eta\nabla_{10'}\xi) = 0 \\ \Rightarrow & -\frac{1}{\eta}\nabla_{11'}\eta(\nabla_{01'}\xi) + \eta(\nabla_{11'}\nabla_{00'}\xi - \nabla_{01'}\nabla_{10'}\xi) + \frac{1}{\xi}\nabla_{11'}\eta\nabla_{10'}\xi = 0 \\ \Rightarrow & -\frac{1}{\eta}\nabla_{11'}\eta(\nabla_{01'}\xi - \frac{\eta}{\xi}\nabla_{10'}\xi) + \eta(\nabla_{11'}\nabla_{00'}\xi - \nabla_{01'}\nabla_{10'}\xi) = 0 \\ \Rightarrow & -\frac{1}{\eta}\nabla_{11'}\eta(\nabla_{01'}\xi - \frac{1}{\xi}\nabla_{11'}\xi) + \eta(\nabla_{11'}\nabla_{00'}\xi - \nabla_{01'}\nabla_{10'}\xi) = 0. \end{aligned}$$

D'où :

$$(2.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\nabla_{10'}\eta}{\eta}(\frac{1}{\xi}\nabla_{11'}\xi + \nabla_{01'}\xi) + \nabla_{11'}\nabla_{00'}\xi - \nabla_{10'}\nabla_{01'}\xi = 0 \\ -\frac{1}{\eta}\nabla_{11'}\eta(\frac{1}{\xi}\nabla_{11'}\xi + \nabla_{01'}\xi) + \eta(\nabla_{11'}\nabla_{00'}\xi - \nabla_{01'}\nabla_{10'}\xi) = 0 \end{array} \right.$$

$$(2.26)$$

et :

$$\begin{aligned} \text{soit} \quad & \left| \begin{array}{cc} \frac{\nabla_{10'}\eta}{\eta} & 1 \\ -\frac{1}{\eta}\nabla_{11'}\eta & 1 \end{array} \right| = \nabla_{10'}\eta + \frac{1}{\eta}\nabla_{11'}\eta = 0 \\ \text{soit} \quad & \xi\nabla_{01'}\xi + \nabla_{11'}\xi = \nabla_{11'}\nabla_{00'}\xi - \nabla_{10'}\nabla_{01'}\xi = 0. \end{aligned}$$

Alors, si  $\eta\nabla_{00'}\eta + \nabla_{01'}\eta \neq 0$ , on a  $\xi\nabla_{00'}\xi + \nabla_{10'}\xi = 0 = \nabla_{00'}\nabla_{11'}\xi - \nabla_{01'}\nabla_{10'}\xi = 0$  et puis (2.25) et (2.26) impliquent que, soit  $\xi\nabla_{01'}\xi + \nabla_{11'}\xi = 0$ , soit  $\nabla_{10'}\eta = \nabla_{11'}\eta = 0$ . Mais dans

ce dernier cas, les équations (2.21) et (2.22) entraînent  $\nabla_{00'}\eta = \nabla_{01'}\eta = 0$ , ce qui contredit l'hypothèse  $\eta\nabla_{00'}\eta + \nabla_{01'}\eta \neq 0$ . Donc  $\xi\nabla_{00'}\xi + \nabla_{10'}\xi = \xi\nabla_{01'}\xi + \nabla_{11'}\xi = 0$  et  $\xi$  est tangent à une SFR.

D'autre part, si  $\xi\nabla_{00'}\xi + \nabla_{10'}\xi \neq 0$ , on obtient de la même manière que  $\eta$  est tangent à une SFR.

Réciproquement, supposons que  $\xi$  est tangent à une SFR, donc :

$$\begin{cases} \xi\nabla_{00'}\xi + \nabla_{10'}\xi = 0 \\ \xi\nabla_{01'}\xi + \nabla_{11'}\xi = 0. \end{cases}$$

On pose  $\xi^0 = \xi$ ,  $\xi^1 = 1$ ,  $\eta^{0'} = -\nabla_{01'}\xi$ ,  $\eta^{1'} = \nabla_{00'}\xi$ . Alors on constate aisément que les équations (2.11) à (2.18) sont vérifiées, ainsi  $\xi^A\eta^{A'}$  satisfait (2.10) et donc il existe une fonction  $f$  telle que

$$\nabla_{AA'}f = \xi^A\eta^{A'}$$

est solution de (2.9). □

**Remarque 2.5.1.** *Ce théorème a été démontré de manière indirecte par Baird-Wood [1], en supposant l'analyticité de la solution  $f$ . Un résumé de leur argument est comme suit : en utilisant l'analyticité de  $f$ , ils ont prolongé la complexification aux points  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  en remplaçant  $t$  par  $ix_0$ . Les équations (2.9) deviennent alors les équations pour un morphisme harmonique sur une variété riemannienne  $A \subset \mathbb{R}^4$ . Par un théorème de Wood, ce dernier correspond à une structure complexe sur  $A$  qui détermine une section de fibre  $A \times \mathbb{CP}^1$ . Alors cette section détermine une surface analytique  $\mathcal{S} \subset \mathbb{CP}^3$ , dont l'intersection avec  $N^5 \subset \mathbb{CP}^3$  détermine une SFR. Notre preuve est directe et ne dépend pas de l'analyticité de la solution. Afin de prolonger la preuve à des variétés plus générales que  $\mathbb{M}$ , lorsqu'on commute les dérivées, il faut faire intervenir des termes de courbure. En général, on ne peut pas espérer que le théorème reste vrai, pourtant, par analogie avec le cas riemannien, on conjecture que le résultat est vrai pour une variété d'Einstein.*

**Exemple 2.5.1.** Soit l'application  $z = z(x)$  définie comme solution de l'équation

$$\xi(z).x = 1 \quad (x \in \mathbb{M})$$

où  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$  est holomorphe en  $z$ , avec  $\xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 - \xi_4^2 = 0$ , c'est à dire  $(i\xi_1)^2 + \sum_{j=1}^3 \xi_j^2 = 0$ .

Dans ce cas,  $z$  est une solution de l'équation (2.9).

On peut paramétriser  $\xi$  sous la forme

$$(i\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \frac{1}{2h}(1 - f^2 - g^2, i(1 + f^2 + g^2), -2f, -2g)$$

où  $f, g$  et  $h$  sont des fonctions méromorphes en  $z$ .

Ainsi

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \frac{1}{2h}(-i(1 - f^2 - g^2), i(1 + f^2 + g^2), -2f, -2g).$$

En outre, comme  $\xi(z).x = 1$ ,  $\xi'(z).x.(\partial z/\partial x_j) + \xi_j = 0$ , d'où

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = -\frac{\xi_j}{\xi'.x}.$$

Soit

$$\nabla_{AA'}z = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \partial_0 z + \partial_1 z & \partial_2 z - i\partial_3 z \\ \partial_2 z + i\partial_3 z & \partial_0 z - \partial_1 z \end{pmatrix}$$

ce qui revient à dire que :

$$\begin{aligned} \nabla_{AA'}z &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -(\xi_0 + \xi_1)/(\xi'.x) & (-\xi_2 + i\xi_3)/(\xi'.x) \\ -(\xi_2 + i\xi_3)/(\xi'.x) & (-\xi_0 + \xi_1)/(\xi'.x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}h(\xi'.x)} \begin{pmatrix} -i(f^2 + g^2) & f - ig \\ f + ig & i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On trouve alors que :

$$\xi_A = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}h)\xi'.x}} \begin{pmatrix} f - ig \\ i \end{pmatrix}, \quad \eta_{A'} = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}h)\xi'.x}} (-if + g \quad 1)$$

On peut vérifier directement que  $\xi_A$  et  $\eta_{A'}$  vérifient les conditions

$$\nabla_{AA'}\xi^B\eta^{A'} = 0 \text{ et } \nabla_{AA'}\xi^A\eta^{B'} = 0.$$

Dans ce cas,  $\xi^A$  et  $\eta^{A'}$  sont toutes deux des SFR.

# Chapitre 3

## Evolution des applications semi-conformes

On va étudier dans ce chapitre les applications semi-conformes vues comme des champs physiques qui évoluent au cours du temps. Au début de ce chapitre, on reformule les équations spinorielles qui représentent les applications semi-conformes et les SFR. Ces nouvelles équations vont être utiles par la suite, surtout dans l'étude de la forme invariante de l'évolution d'une application semi-conforme. Ces équations spinorielles sont données, d'une part, par le fait qu'une application semi-conforme  $\varphi$ , définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  soit caractérisée par l'existence d'un champ spinoriel  $\mu_A$  tel que  $D^{C(A}\mu^{B)}\mu_C = 0$ . D'autre part, par le fait que le champ spinoriel  $v^{AA'} = \mu^A \bar{\mu}^{A'}$  soit une congruence de rayons de lumière sans cisaillement (SFR) si et seulement  $\mu^A \mu^B \nabla_{AA'} \mu_B = 0$ . On montre que cette construction d'une SFR, donne naissance à deux équations équivalentes à celles donnant l'évolution d'une application semi-conforme définie sur un domaine de  $\mathbb{R}^3$ . Cette SFR, à partir de laquelle on peut construire des champs physiques, est parfaitement adaptée pour être définie dans un graphe fini, ce qui motive notre quatrième chapitre.

A la fin de ce chapitre, on va généraliser le travail, mais pour un espace-temps muni d'une métrique qui dépend de  $t$ , autrement dit, on va considérer une évolution couplée de la métrique et de l'application semi-conforme. On va montrer que, sous certaines conditions, cette évolution conserve le fait que  $U_t$  est tangent à un feuilletage conforme, où  $U_t$  est le vecteur tangent aux feuilletages de  $\varphi_t$ .

### 3.1 Evolution des applications semi-conformes dans $\mathbb{M}$

#### 3.1.1 Intégrabilité

D'après les lemmes (2.4.1) et (2.4.2),  $\varphi : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ , où  $A$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ , est une application semi-conforme si et seulement s'il existe un champ spinoriel  $\mu_A$  défini sur  $A$ , tel que,  $D_{AB}\varphi = \mu_A \mu_B$  vérifiant

$$(3.1) \quad D^{C(A}\mu^{B)}\mu_C = 0.$$



En effet, la condition (3.1) correspond à l'intégrabilité du champ  $\mu_A \mu_B$ .

La proposition suivante donne une écriture variante de l'équation (3.1), une écriture en fonction des dérivées partielles de  $\mu = \mu^0/\mu^1$ .

**Proposition 3.1.1.** *Soit  $\mu^A$  un champ spinoriel défini sur un ouvert  $A \subset \mathbb{R}^3$ . Alors  $\mu^A$  est intégrable, c'est-à-dire que  $D^{C(A)} \mu^B \mu_C = 0$  si et seulement si :*

$$\begin{cases} (i) & \mu \partial_1 \mu + \mu^2 \partial_q \mu - \partial_{\bar{q}} \mu = 0 \\ (ii) & \mu \partial_1 \mu^1 + \mu^2 \partial_q \mu^1 - \partial_{\bar{q}} \mu^1 = 0 \\ (iii) & \partial_{\bar{q}} \mu^1 + \mu \partial_q (\mu \mu^1) = 0, \end{cases}$$

où  $\mu = \mu^0/\mu^1$  et où on utilise les coordonnées  $(x_1, q = x_2 + ix_3)$ .

**Remarque 3.1.1.** *Dans le théorème 3.2.1, on donnera une interprétation géométrique à l'équation (i) en terme du champ vectoriel unitaire  $U = \frac{1}{|\mu|^2+1}(|\mu|^2 - 1, 2\mu)$  correspondant. En effet, donné un champ  $U$  tel que  $\mu$  vérifie (i), trouver une application  $\varphi$  dont  $U$  est tangent à ses fibres revient à trouver  $\mu^1$  tel que (ii) et (iii) sont satisfaites.*

**Preuve** L'équation  $D^{C(A)} \mu^B \mu_C = 0$  est équivalente à :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -D^{00} \mu^0 \mu^1 + D^{01} \mu^0 \mu^0 \rightarrow (\partial_2 + i\partial_3) \mu^0 \mu^1 + \partial_1 (\mu^0)^2 = 0 \\ -D^{01} \mu^0 \mu^1 + D^{11} \mu^0 \mu^0 \rightarrow -\partial_1 \mu^0 \mu^1 + (\partial_2 - i\partial_3) (\mu^0)^2 = 0 \\ -D^{00} \mu^1 \mu^1 + D^{10} \mu^1 \mu^0 \rightarrow (\partial_2 + i\partial_3) (\mu^1)^2 + \partial_1 \mu^0 \mu^1 = 0 \\ -D^{01} \mu^1 \mu^1 + D^{11} \mu^1 \mu^0 \rightarrow -\partial_1 (\mu^1)^2 + (\partial_2 - i\partial_3) \mu^0 \mu^1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\partial_2 + i\partial_3) \mu^0 \mu^1 + \partial_1 (\mu^0)^2 = 0 \\ -\partial_1 (\mu^1)^2 + (\partial_2 - i\partial_3) \mu^0 \mu^1 = 0 \\ (\partial_2 + i\partial_3) (\mu^1)^2 + (\partial_2 - i\partial_3) (\mu^0)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu^0 \partial_{\bar{q}} \mu^1 + \mu^1 \partial_{\bar{q}} \mu^0 + \mu^0 \partial_1 \mu^0 = 0 \\ -\mu^1 \partial_1 \mu^1 + \mu^0 \partial_q \mu^1 + \mu^1 \partial_q \mu^0 = 0 \\ \mu^1 \partial_{\bar{q}} \mu^1 + \mu^0 \partial_q \mu^1 = 0 \quad (iv). \end{cases}$$

En combinant les deux dernières de ces équations on déduit que :

$$\begin{cases} \mu^0 \mu^1 \partial_1 \mu^1 + (\mu^0)^2 \partial_q \mu^1 - (\mu^1)^2 \partial_{\bar{q}} \mu^1 = 0 \\ (\mu^0)^2 \partial_q \mu^0 - (\mu^1)^2 \partial_{\bar{q}} \mu^0 + \mu^0 \mu^1 \partial_1 \mu^0 = 0. \end{cases}$$

Puis on multiplie la deuxième de ces équations par  $\mu^1$  et en soustrayant  $\mu^0$  fois la deuxième, on obtient l'équation (i).

D'autre part, l'équation (ii) se déduit de la première équation en divisant par  $(\mu^1)^2$ . Enfin l'équation (iii) n'est autre que l'équation (iv). De l'inverse des calculs ci-dessus, on déduit la réciproque, c'est-à-dire que les équations (i), (ii), (iii) entraînent l'intégrabilité de  $\mu^A$ .  $\square$

### 3.1.2 Equations d'une SFR

On a vu dans la section (2.3.4) que  $v^a$  est tangent à une congruence de rayons de lumière sans cisaillement sur un domaine de  $\mathbb{M}$  si et seulement si  $\mu^A \mu^B \nabla_{AA'} \mu_B = 0$ . Dans cette section, on va montrer que cette équation est l'équivalente de deux autres, l'une qui est équivalente au fait que le champ  $U$  est tangent aux fibres d'une application semi-conforme, l'autre décrit son évolution.

**Proposition 3.1.2.** *Soit  $v^{AA'} = \mu^A \bar{\mu}^{A'}$  un champ spinoriel défini sur un ouvert  $A \subset \mathbb{M}$ . Alors  $v^{AA'}$  est une SFR si et seulement si  $\mu = \mu^0/\mu^1$  vérifie les deux équations suivantes :*

$$(3.2) \quad \mu \partial_1 \mu - \mu^2 \partial_q \mu + \partial_{\bar{q}} \mu = 0$$

$$(3.3) \quad \mu \partial_t \mu + \mu^2 \partial_q \mu + \partial_{\bar{q}} \mu = 0.$$

**Preuve** D'après l'équation (2.8), la condition d'une SFR est donnée par :

$$\mu^A \mu^B \nabla_{AA'} \mu_B = 0$$

où  $\mu_1 = \mu^0$  et  $\mu_0 = -\mu^1$ , alors cette équation est équivalente aux paires d'équations :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \mu^0 \mu^0 \nabla_{00'} \mu_0 + \mu^0 \mu^1 \nabla_{00'} \mu_1 + \mu^1 \mu^0 \nabla_{10'} \mu_0 + \mu^1 \mu^1 \nabla_{10'} \mu_1 = 0 \\ \mu^0 \mu^0 \nabla_{01'} \mu_0 + \mu^0 \mu^1 \nabla_{01'} \mu_1 + \mu^1 \mu^1 \nabla_{11'} \mu_0 + \mu^1 \mu^1 \nabla_{11'} \mu_1 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -(\mu^0)^2 \nabla_{00'} \mu^1 + \mu^0 \mu^1 \nabla_{00'} \mu^0 - \mu^0 \mu^1 \nabla_{10'} \mu^1 + (\mu^1)^2 \nabla_{10'} \mu^0 = 0 \\ -(\mu^0)^2 \nabla_{01'} \mu^1 + \mu^0 \mu^1 \nabla_{01'} \mu^0 - (\mu^1)^2 \nabla_{11'} \mu^1 + (\mu^1)^2 \nabla_{11'} \mu^0 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \mu^0 (\xi^1)^2 \nabla_{00'} (\frac{\mu^0}{\mu^1}) + (\mu^1)^3 \nabla_{10'} (\frac{\mu^0}{\mu^1}) = 0 \\ \mu^0 (\xi^1)^2 \nabla_{01'} (\frac{\mu^0}{\mu^1}) + (\mu^1)^3 \nabla_{11'} (\frac{\mu^0}{\mu^1}) = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\mu^0}{\mu^1} \nabla_{00'} (\frac{\mu^0}{\mu^1}) + \nabla_{10'} (\frac{\mu^0}{\mu^1}) = 0 \\ \frac{\mu^0}{\mu^1} \nabla_{01'} (\frac{\mu^0}{\mu^1}) + \nabla_{11'} (\frac{\mu^0}{\mu^1}) = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (\frac{\mu^0}{\mu^1}) (\nabla_{00'} - \nabla_{11'}) (\frac{\mu^0}{\mu^1}) + \nabla_{10'} (\frac{\mu^0}{\mu^1}) - (\frac{\mu^0}{\mu^1})^2 \nabla_{01'} (\frac{\mu^0}{\mu^1}) = 0 \\ (\frac{\mu^0}{\mu^1}) (\nabla_{00'} + \nabla_{11'}) (\frac{\mu^0}{\mu^1}) + \nabla_{10'} (\frac{\mu^0}{\mu^1}) + (\frac{\mu^0}{\mu^1})^2 \nabla_{01'} (\frac{\mu^0}{\mu^1}) = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \mu \partial_1 \mu + \partial_{\bar{q}} \mu - \mu^2 \partial_q \mu = 0 \\ \mu \partial_t \mu + \partial_{\bar{q}} \mu + \mu^2 \partial_q \mu = 0. \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

Ces équations ont une interprétation indépendante des coordonnées.

On va voir que la première est équivalente au fait que le champ  $U = \sigma^{-1}(\mu)$  ( $\sigma : S^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \infty$  est la projection stéréographique) est tangent aux fibres d'une application semi-conforme, et que la deuxième décrit l'évolution de cette dernière.

### 3.1.3 Evolution d'un feuilletage conforme géodésique

Dans ce paragraphe, on va démontrer que lorsque le champ de vecteurs  $U$ , déterminé par la fonction  $\mu$ , est tangent à un feuilletage conforme géodésique, alors son évolution dans le temps est constante. Or, une application semi-conforme à valeurs dans une surface est harmonique, et donc un morphisme harmonique, si et seulement si ses fibres sont minimales.

**Proposition 3.1.3.** *Soit  $V = (|\mu|^2 - 1)\partial_1 + 2\mu\partial_q + 2\bar{\mu}\partial_{\bar{q}}$  un champ de vecteurs tangent à un feuilletage conforme géodésique, alors la fonction  $\mu$  vérifie l'équation suivante :*

$$(3.4) \quad \partial_t \mu = 0.$$

**Preuve**  $V$  est un champ géodésique, alors

$$\nabla_U U = 0,$$

où  $U = V/|V|$ , ce qui entraîne les équations suivantes :

$$\begin{cases} (|\mu|^2 - 1)\partial_1 |\mu|^2 + 2\mu\partial_q |\mu|^2 + 2\bar{\mu}\partial_{\bar{q}} |\mu|^2 = \lambda(|\mu|^2 - 1) \\ (|\mu|^2 - 1)\partial_1 \mu + 2\mu\partial_q \mu + 2\bar{\mu}\partial_{\bar{q}} \mu = \lambda\mu \\ (|\mu|^2 - 1)\partial_1 \bar{\mu} + 2\mu\partial_q \bar{\mu} + 2\bar{\mu}\partial_{\bar{q}} \bar{\mu} = \lambda\bar{\mu}. \end{cases}$$

Il s'ensuit que :

$$(|\mu|^2 - 1)\partial_1 \mu + 2\mu\partial_q \mu + 2\bar{\mu}\partial_{\bar{q}} \mu = 0.$$

Or, il s'agit d'un feuilletage conforme géodésique, c'est-à-dire que  $\mu$  vérifie l'équation (3.2)

$$-\mu\partial_1 \mu + \mu^2\partial_q \mu - \partial_{\bar{q}} \mu = 0.$$

Alors ces deux équations montrent que :

$$\begin{aligned} & (|\mu|^2 - 1)[\mu^2\partial_q \mu - \partial_{\bar{q}} \mu] + 2\mu^2\partial_q \mu + 2|\mu|^2\partial_{\bar{q}} \mu = 0 \\ \Leftrightarrow & \mu^2(|\mu|^2 + 1)\partial_q \mu + (|\mu|^2 + 1)\partial_{\bar{q}} \mu = 0 \\ \Leftrightarrow & \mu^2\partial_q \mu + \partial_{\bar{q}} \mu = 0 \\ \Leftrightarrow & \partial_t \mu = 0 \quad \text{d'après l'équation (3.3).} \end{aligned}$$

□

## 3.2 Forme invariante de l'évolution d'une application semi-conforme

Pour comprendre géométriquement les équations dans la proposition (3.1.2) associées à une SFR, on définit pour un point  $x \in \mathbb{R}_t^3$  et un vecteur unitaire  $U_t(x) \in T_x \mathbb{R}_t^3$ , la géodésique isotrope déterminée par  $U_t(x)$  pour être le rayon de lumière passant par  $x$  et engendrée par

le vecteur isotrope  $\partial_t + U_t(x)$ . On verra comment des quantités évoluent le long de ces géodésiques. D'abord, on introduit un lemme qui caractérise le transport parallèle de  $U$  le long des rayons engendrés par  $U$ .

**Lemme 3.2.1.** *Soit  $U_0$  un champ de vecteurs unitaire dans un domaine de  $\mathbb{R}_0^3$ , qui définit un autre champ de vecteurs  $U_t$  dans un domaine de  $\mathbb{R}_t^3$  par transport parallèle de  $U_0$  le long de la géodésique isotrope déterminée par  $U_0$ . Alors, l'évolution de  $U$  est donnée par :*

$$(3.5) \quad \frac{\partial U}{\partial t} = -\nabla_U^{\mathbb{R}^3} U$$

où en écrivant  $U = U^i(t, x^k)\partial_i$ , on pose  $\frac{\partial U}{\partial t} = \left(\frac{\partial U^i}{\partial t}\right)\partial_i$ .

**Preuve** Par construction :  $U_t(y) = U_0(x)$  avec  $y = x + tU_0(x)$ . Pour un point  $x_0 \in \mathbb{R}_0^3$ , on a

$$\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U_t(x) - U_0(x)}{t}.$$

Or

$$\begin{aligned} U_0(x) &= U_t(x + tU_0(x)) \\ &= U_t(x) + t dU_t(x)(U_0(x)) + \mathcal{O}(t^2). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U_0(x) - t dU_t(x)(U_0(x)) - U_0(x) + \mathcal{O}(t^2)}{t} \\ &= -dU_0(x)(U_0(x)) = -\nabla_{U_0(x)} U_0. \end{aligned}$$

L'inverse résulte de l'unicité de la solution d'une équation différentielle du premier ordre, compte tenu des données initiales sur une hypersurface.  $\square$

Soit la base orthogonale  $(V, X, Y)$  tel que :  $V = (|\mu|^2 - 1, 2\mu) = ((|\mu|^2 - 1)\partial_1 + 2\mu\partial_q + 2\bar{\mu}\partial_{\bar{q}})$ ,  $X = (\alpha, \frac{1}{2}(1 - \alpha^2 + \beta^2), -\alpha\beta)$  et  $Y = (\beta, -\alpha\beta, \frac{1}{2}(1 + \alpha^2 - \beta^2))$ , de sorte que  $V$  est le vecteur tangent à un feuilletage conforme, avec  $\mu = \alpha - i\beta$ , alors

$$X - iY = \mu\partial_1 - \mu^2\partial_q + \partial_{\bar{q}}$$

**Lemme 3.2.2.** *Supposons que  $U$  est tangent à un feuilletage conforme et soit  $\mu = \sigma(U)$  sa représentation par la projection stéréographique. Alors, l'équation d'évolution (3.3) s'écrit sous la forme :*

$$(3.6) \quad \partial_t \mu = -\frac{1}{(|\mu|^2 + 1)^2} \langle \nabla_V V, X - iY \rangle$$

### Preuve

$$\begin{aligned}\nabla_V V &= \nabla_{[(|\mu|^2-1)\partial_1+2\mu\partial_q+2\bar{\mu}\partial_{\bar{q}}]}[(|\mu|^2-1)\partial_1+2\mu\partial_q+2\bar{\mu}\partial_{\bar{q}}] \\ &= \{(|\mu|^2-1)\partial_1\mu+2\mu\partial_q\mu+2\bar{\mu}\partial_{\bar{q}}\mu\}(\bar{\mu}\partial_1+2\partial_q) + \{(|\mu|^2-1)\partial_1\bar{\mu}+2\mu\partial_q\bar{\mu}+2\bar{\mu}\partial_{\bar{q}}\bar{\mu}\}(\mu\partial_1+2\partial_{\bar{q}}).\end{aligned}$$

Or, dans le cas d'un feuilletage conforme,  $\mu$  vérifie l'équation (3.2), on remplace alors  $\partial_1\mu$  par  $\frac{1}{\mu}\mu^2\partial_q\mu - \partial_{\bar{q}}\mu$ , donc

$$\begin{aligned}\nabla_V V &= \frac{(|\mu|^2+1)}{\mu}(\mu^2\partial_q\mu + \partial_{\bar{q}}\mu)(\bar{\mu}\partial_1+2\partial_q) + \frac{(|\mu|^2+1)}{\bar{\mu}}(\bar{\mu}^2\partial_{\bar{q}}\bar{\mu} + \partial_q\bar{\mu})(\mu\partial_1+2\partial_{\bar{q}}) \\ &= -(|\mu|^2+1)(\partial_t\mu(\bar{\mu}\partial_1+2\partial_q) + \partial_t\bar{\mu}(\mu\partial_1+2\partial_{\bar{q}})).\end{aligned}$$

Or,

$$\langle \mu\partial_1+2\partial_{\bar{q}}, X-iY \rangle = 0$$

et

$$\langle \bar{\mu}\partial_1+2\partial_q, X-iY \rangle = |\mu|^2+1.$$

Ce qui montre que

$$\partial_t\mu = -\frac{1}{(|\mu|^2+1)^2}\langle \nabla_V V, X-iY \rangle.$$

□

On peut donner une autre écriture de l'équation (3.6), tout en normalisant les vecteur  $V, X$  et  $Y$ , c'est-à-dire qu'on considère les champs de vecteurs :

$$U = \frac{V}{|V|}, \hat{X} = \frac{X}{|X|} \quad \text{et} \quad \hat{Y} = \frac{Y}{|Y|}.$$

Or

$$|V| = |\mu|^2+1, |X| = |Y| = \frac{1}{2}(|\mu|^2+1),$$

alors

$$\begin{aligned}\partial_t\mu &= -\langle \nabla_U U, X-iY \rangle \\ &= -\frac{1}{2}(|\mu|^2+1)\langle \nabla_U U, \hat{X}-i\hat{Y} \rangle.\end{aligned}$$

On va maintenant donner une interprétation géométrique des équations (3.2) et (3.3) d'une SFR. Cette interprétation sera la base d'une généralisation d'une SFR aux cas de variétés avec courbure.

**Théorème 3.2.1.** *On suppose que  $\mu$  définit une SFR sur un domaine  $W \subset \mathbb{M}$ ,  $U$  donnée par :*

$$U = \frac{1}{|\mu|^2+1}(|\mu|^2-1, 2\mu) \in S^2$$

le champ de vecteurs unitaires correspondant à  $\mu$ . Soit  $g = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$  la restriction de la métrique canonique de  $\mathbb{M}$  sur chacune des tranches  $\mathbb{R}_t^3 : t = \text{const}$ . Alors dans  $W$  :

$$(3.7) \quad \begin{cases} (i) & (\mathcal{L}_U g)(X, Y) = ag(X, Y) \\ (ii) & \frac{\partial U}{\partial t} = -\nabla_U^{\mathbb{R}^3} U, \end{cases}$$

pour une fonction  $a : W \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $X, Y \in \mathbb{R}_t^3$  deux vecteurs orthogonaux à  $U$  et où  $\nabla^{\mathbb{R}^3}$  est la connexion de Levi-Civita sur  $(\mathbb{R}_t^3, g)$ . En particulier,  $U$  est tangent à un feuilletage conforme dans  $W \cap \mathbb{R}_t^3$ , pour tout  $t$ .

Réciproquement, toute solution  $U$  de (3.7) dans un domaine  $W \subset \mathbb{M}$  détermine une SFR sur  $W$ . De plus, si (ii) est vérifiée dans  $\mathbb{M}$  et (i) vérifiée sur une hypersurface  $\mathbb{R}_{t_0}^3$ , pour un  $t_0$ , alors (i) est vérifiée pour tout  $t$ , où il est entendu que le domaine de  $U$  a besoin d'être limité pour éviter les points singuliers du feuilletage associé. Alors la conformalité du feuilletage associé au champ de vecteurs unitaires  $U$  est préservée par le flot (3.7)(i).

**Preuve** On note tout d'abord que l'équation (3.7)(i) est invariante par la correspondance  $U \rightarrow fU$  pour une fonction réelle  $f$  ; on va donc travailler avec le champ de vecteurs

$$V = (|\mu|^2 - 1, 2\mu) = (|\mu|^2 - 1)\partial_1 + 2\mu\partial_q + 2\bar{\mu}\partial_{\bar{q}}.$$

On rappelle que  $x^1 = x^1$ ,  $q = x^2 + ix^3$ . Alors l'équation (3.7)(i) est équivalente à l'équation suivante :

$$(\mathcal{L}_V g)(X - iY, X - iY) = 0,$$

pour deux vecteurs  $X$  et  $Y$  définis de façon que  $\|X\| = \|Y\|$ ,  $g(X, Y) = 0$ . Un choix convenable est donné par

$$X - iY = \mu\partial_1 - \mu^2\partial_q + \partial_{\bar{q}}.$$

On note que  $\langle \partial_q, \partial_q \rangle = \langle \partial_{\bar{q}}, \partial_{\bar{q}} \rangle = 0$  et  $\langle \partial_q, \partial_{\bar{q}} \rangle = \frac{1}{2}$ , on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\mathcal{L}_V g)(X - iY, X - iY) &= g(\nabla_{X-iY} V, X - iY) = -g(V, \nabla_{X-iY}(X - iY)) \\ &= -\langle (|\mu|^2 - 1)\partial_1 + 2\mu\partial_q + 2\bar{\mu}\partial_{\bar{q}}, \nabla_{(\mu\partial_1 - \mu^2\partial_q + \partial_{\bar{q}})}(\mu\partial_1 - \mu^2\partial_q + \partial_{\bar{q}}) \rangle \\ &= (1 + |\mu|^2)(\mu\partial_1\mu - \mu^2\partial_q\mu + \partial_{\bar{q}}\mu). \end{aligned}$$

D'où l'équivalence entre les équations (3.2) et (3.3).

Nous effectuons un calcul similaire afin de déterminer l'évolution dans le temps. On suppose que les deux équations (3.2) et (3.7)(ii) sont vérifiées. Alors

$$\begin{aligned} \nabla_V^{\mathbb{R}^3} V &= \{(|\mu|^2 - 1)\partial_1\mu + 2\mu\partial_q\mu + 2\bar{\mu}\partial_{\bar{q}}\mu\}(\bar{\mu}\partial_1 + 2\partial_q) \\ &\quad + \{(|\mu|^2 - 1)\partial_1\bar{\mu} + 2\mu\partial_q\bar{\mu} + 2\bar{\mu}\partial_{\bar{q}}\bar{\mu}\}(\mu\partial_1 + 2\partial_{\bar{q}}) \\ &= -(|\mu|^2 + 1)(\partial_t\mu(\bar{\mu}\partial_1 + 2\partial_q) + \partial_t\bar{\mu}(\mu\partial_1 + 2\partial_{\bar{q}})). \end{aligned}$$

Or  $\langle \mu \partial_1 + 2\partial_{\bar{q}}, X - iY \rangle = 0$  et  $\langle \bar{\mu} \partial_1 + 2\partial_q, X - iY \rangle = |\mu|^2 + 1$ , d'où

$$\partial_t \mu = -\frac{1}{(|\mu|^2 + 1)^2} \langle \nabla_V V, X - iY \rangle.$$

D'autre part

$$\frac{\partial V}{\partial t} = (\bar{\mu} \partial_1 + 2\partial_q) \partial_t \mu + (\mu \partial_1 + 2\partial_{\bar{q}}) \partial_1 \bar{\mu},$$

et on obtient

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\langle \nabla_V V, X - iY \rangle}{(|\mu|^2 + 1)^2} (2(X + iY) + \bar{\mu}V) - \frac{\langle \nabla_V V, X + iY \rangle}{(|\mu|^2 + 1)^2} (2(X - iY) + \mu V).$$

En remplaçant  $V$  par  $U = \frac{V}{\|V\|}$  et les vecteurs  $X, Y$  par  $\hat{X} = \frac{X}{\|X\|}, \hat{Y} = \frac{Y}{\|Y\|}$ , respectivement, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \langle \nabla_U U, \hat{X} - i\hat{Y} \rangle (\hat{X} + i\hat{Y}) - \frac{1}{2} \langle \nabla_U U, \hat{X} + i\hat{Y} \rangle (\hat{X} - i\hat{Y}) \\ &= -\nabla_U^{\mathbb{R}^3} U. \end{aligned}$$

Réciproquement, si les deux équations (3.2) et (3.7)(ii) sont vérifiées, on inverse les arguments ci-dessus et on obtient l'équation (3.3).

Pour la dernière partie du théorème, on calcule la dérivée par rapport au temps de (3.7)(i), étant donné que (3.7)(ii) est vérifiée. L'un de nos objectifs, est de voir comment les équations (3.7) s'adaptent à des espaces temps plus généraux, on effectue donc le calcul dans la proposition 3.3.1 ci-dessous, qui établit que dans l'espace de Minkowski, en écrivant  $f = (\mathcal{L}_U g)(X - iY, X - iY)$ , avec  $X, Y$  sont deux vecteurs orthogonaux unitaires,

$$df(\partial_t + U) = \alpha f$$

pour un certain  $\alpha$ . En particulier, par l'unicité de la solution d'une EDP de premier ordre, si  $f$  s'annule sur une hypersurface, elle doit s'annuler sur le futur espace temps de cet hypersurface. Ce qui complète la démonstration du théorème.  $\square$

Étant donné une famille des champs de vecteurs unitaires  $U_t$ , chacun tangent à un feuilletage conforme sur la tranche  $\mathbb{R}_t^3$  évoluant suivant 3.7, on montre maintenant comment évolue les applications semi-conformes correspondantes,  $\varphi_t : A \subset \mathbb{R}_t^3 \rightarrow \mathbb{C}$ .

**Proposition 3.2.1.** *Soit  $U_t$  une famille de champs de vecteurs définis sur  $\mathbb{R}_t^3$  qui évoluent suivant l'équation (3.7)(ii),  $\varphi_t : \mathbb{R}_t^3 \rightarrow \mathbb{C}$  une famille d'applications semi-conformes dont les fibres ont pour vecteurs tangents les vecteurs  $U_t$  alors :*

$$(3.8) \quad d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)(U) = -\tau(\varphi)$$

où  $\tau$  est le champ de tension de  $\varphi$ . De plus, toute autre solution de l'équation (3.8) qui a les mêmes fibres de  $\varphi_t$ , prend la forme de  $f_t \circ \varphi_t$ , où  $f_t$  est une application conforme quelconque dans un domaine de  $\mathbb{C}$ .

**Preuve** En dérivant l'équation  $d\varphi_t(U_t) = 0$  par rapport à  $t$ , on obtient :

$$d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)(U) + d\varphi\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) = 0.$$

Or, d'après l'équation (3.7)(ii) :

$$\begin{aligned} d\varphi\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) &= -d\varphi(\nabla_U U) \\ &= \tau(\varphi), \end{aligned}$$

et ceci d'après la formule fondamentale d'une application semi-conforme  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$  :

$$\tau(\varphi) = -(n-2)d\varphi(\text{grad} \ln(\lambda)) - (m-n)d\varphi(\nu)$$

où  $\nu = \nabla_U U$  est la courbure moyenne des fibres (voir [1]), on en déduit que  $d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)(U) = -\tau(\varphi)$ .

Soit maintenant  $\psi_t$  une famille d'applications semi-conformes ayant les mêmes fibres que  $\varphi_t$  ; alors localement, on a que  $\psi_t = f_t \circ \varphi_t$  pour une certaine famille des applications conformes  $f_t : A \rightarrow \mathbb{C}$ , où  $A$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$ . On affirme que

$$(3.9) \quad d\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)(U) + \tau(\psi) = df\left(d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)(U) + \tau(\varphi)\right) + \lambda^2\tau(f) \circ \varphi,$$

où  $\lambda$  est la dilatation de  $\varphi$ . En particulier, si  $\varphi$  est solution de l'équation (3.10), alors  $\psi$  l'est aussi, si et seulement si  $\tau(f) = 0$ , ce qui est le cas quelque soit  $f_t$  est conforme.

Pour montrer (3.9), on calcule  $d\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)(U)$ . D'abord

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = df\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + \frac{\partial f}{\partial t} \circ \varphi.$$

On définit  $\Phi : \mathbb{R}_t^3 \times I \rightarrow \mathbb{C}$  ( $I \subset \mathbb{R}$  intervalle) par  $\Phi(x, t) = \varphi_t(x)$ , et on écrit  $\nabla^\psi$  pour la connexion dans le fibré pull-back  $\psi^{-1}T\mathbb{C}$ . Alors,  $d\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)(U) = \nabla_U^\psi \frac{\partial\psi}{\partial t}$  et on obtient :

$$\begin{aligned} \nabla_U^\psi \left( df\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) \right) &= \nabla_U^\psi \left( df \circ d\Phi \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \right) \\ &= \nabla_U^\psi \left( d(f \circ \Phi) \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \right) \\ &= \nabla d(f \circ \Phi) \left( U, \frac{\partial}{\partial t} \right) + d(f \circ \Phi) \left( \nabla_U \frac{\partial}{\partial t} \right) \end{aligned}$$



où  $\nabla d(f \circ \Phi)$  est la seconde forme fondamentale de  $f \circ \Phi$ . Mais par la formule de la seconde forme fondamentale d'une application composée :  $\nabla d(f \circ \Phi) = df(\nabla d\Phi) + \nabla df(d\Phi, d\Phi)$ , d'où

$$\begin{aligned} \nabla_U^\psi \left( df \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right) &= df \left( \nabla d\Phi \left( U, \frac{\partial}{\partial t} \right) \right) + \nabla df \left( d\Phi(U), d\Phi \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \right) + d(f \circ \Phi) \left( \nabla_U \frac{\partial}{\partial t} \right) \\ &= df \left( \nabla d\Phi \left( U, \frac{\partial}{\partial t} \right) + d\Phi \left( \nabla_U \frac{\partial}{\partial t} \right) \right) \quad \text{car } d\Phi(U) = 0 \\ &= df \left( \nabla_U^\Phi d\Phi \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) \right) = df \left( \nabla_U^\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} d \left( \frac{\partial f}{\partial t} \circ \varphi \right) (U) &= \nabla_U^\psi \left( \frac{\partial f}{\partial t} \circ \varphi \right) \\ &= d \left( \frac{\partial f}{\partial t} \circ \varphi \right) (U) \\ &= d \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) (d\varphi(U)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

On obtient alors que

$$\begin{aligned} d \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) (U) &= df \left( \nabla_U^\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \\ &= df \left( d \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) (U) \right). \end{aligned}$$

Enfin, par la loi du champ de tension d'une application composée :

$$\begin{aligned} \tau(\psi) &= df(\tau(\varphi)) + \text{trace} \nabla df(d\varphi, d\varphi) \\ &= df(\tau(\varphi)) + \lambda^2 \tau(f) \end{aligned}$$

et la formule (3.9) s'ensuit. □

On peut normaliser l'évolution  $\frac{\partial \varphi_t}{\partial t}$ , au moins localement, de la manière suivante : soit  $A \subset \mathbb{R}_0^3$  un ouvert sur lequel  $\varphi_0$  est une submersion avec des fibres connexes, soit  $\Sigma \subset A$  une tranche, c'est-à-dire, une hypersurface de dimension 2 où les composantes des fibres de  $\varphi_0$  l'intersectent transversalement en un seul point. Par exemple, après un changement convenable de métrique, on peut prendre  $\Sigma$  comme la tranche  $x^1 = 0$  ; pour cela, on va supposer que  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial x^1}(x) \neq 0$  pour tout  $x \in \Sigma \cap A$ . Les points de  $\Sigma$  sont alors paramétrés par les coordonnées  $(x^2, x^3)$ .

Soit  $c(s)$  la courbe intégrale de  $U$  partant d'un point de  $\Sigma$  :  $c(0) \in \Sigma$ ,  $c'(s) = U(c(s))$ . Alors, pour tout  $s_0$  suffisamment petit, on peut supposer que  $c(s) \in A$  pour tout  $0 \leq s \leq s_0$ , d'où, par la proposition 3.2.1

$$(3.10) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(c(s_0)) = - \int_{s=0}^{s_0} \tau_\varphi(c(s)) ds.$$

On note que  $\tau_\varphi(c(s)) \in T_{\varphi(c(s))}\mathbb{C} = T_{y_0}\mathbb{C}$ , où  $y_0 = \varphi(c(s_0)) = \varphi(c(s))$  (puisque  $c(s)$  paramétrise le fibre de  $\varphi$  à travers de  $c(0)$ ) ; par conséquent, l'intégrale dans l'équation (3.10) est bien-définie et donne un vecteur dans  $T_{y_0}\mathbb{C} \cong \mathbb{C}$ . Les différents choix de  $\Sigma$  donnent des valeurs différentes pour  $\partial\varphi_t/\partial t$ , mais  $d(\partial\varphi_t/\partial t)(U)$  est bien définie et indépendante de ce choix.

**Exemple 3.2.1.** Soit  $\varphi_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  l'application semi-conforme définie par  $\varphi_0(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + ix_3$ . Alors les fibres de  $\varphi_0$  sont des cercles centrés sur l'axe  $x^3$  dans le plan parallèle au plan formé par  $x_1$  et  $x_2$ . Soit  $U_0$  le vecteur tangent aux fibres de  $\varphi_0$ , on a :

$$U_0 = \left( \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{-x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, 0 \right).$$

Soit  $\Sigma$  la tranche définie par  $x_1 = 0$  ; alors la courbe intégrale de  $U_0$  à travers  $(0, x_2, x_3)$  est donnée par

$$c(s) = \left( x_2 \sin\left(\frac{s}{x_2}\right), x_2 \cos\left(\frac{s}{x_2}\right), x_3 \right).$$

Maintenant  $\tau(\varphi_0) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \frac{1}{x_2}$ , de sorte que

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} = - \int_{s=0}^{s_0} \tau_{\varphi_0}(c(s)) ds = - \int_0^{s_0} \frac{1}{x_2} ds = - \frac{s_0}{x_2} = - \arg(x_1 + ix_2).$$

En fait, il est possible de calculer l'évolution de  $\varphi_0$  :

$$\varphi_t = ix_3 + r - t \arg\left(\frac{r - it}{x_1 - x_2}\right),$$

où  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - t^2}$  ; l'application  $\varphi_t$  est définie et de classe  $C^\infty$  sur le domaine  $x_1^2 + x_2^2 > t^2$ .

### 3.3 Evolution du couple métrique et application semi-conforme

Dans ce paragraphe, on va généraliser le théorème 3.2.1, pour un espace muni d'une métrique qui dépend du temps, c'est-à-dire qu'on va considérer le triplet  $(M^3, g(t), U(t))$ , où  $g(t)$  une famille de métriques riemanniennes sur l'espace  $M^3$  qui évolue au cours du temps, et  $U(t)$  un champ de vecteurs sur  $(M^3, g(t))$ . On suppose que  $t$  est défini sur un intervalle  $I$

dans  $\mathbb{R}$ , qui est fini, ou infini. Enfin, on considère l'espace temps  $M^3 \times I$  muni d'une métrique  $\mathcal{G} = -f(x, t)^2 dt^2 + g(t)$ , où  $f : I \times M^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction non-nulle ; c'est le genre d'une métrique qui se produit dans la réduction de la fonction de la distance Perelman, où  $g(t)$  évolue suivant le flot de Ricci avec le temps inversé :  $\frac{\partial g}{\partial t} = 2\text{Ricci}(g(t))$  et où  $-f^2$  est la courbure scalaire de  $g(t)$  (généralement négative) [9]. On note que dans cette situation plus générale, la courbe isotrope engendrée par  $U$ , est la courbe intégrale du champ de vecteurs  $\partial_t + fU$  dans  $I \times M^3$ , qui ne sera plus en général géodésique.

Il y a certains principes qu'on tient à respecter dans une telle évolution :

1. Le champ de vecteurs  $U(t)$  devrait être tangent à un feuilletage conforme.
2. Si pour un point dans l'espace temps futur, le flot existe, la stabilité de  $g(t)$  et  $U(t)$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ , en particulier, on aura besoin de

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \nabla_U^{g(t)} U = 0.$$

c'est-à-dire que les fibres du feuilletage associé deviennent géodésiques quand  $t \rightarrow \infty$ .

On va d'abord établir une base de calcul concernant les quantités de la métrique  $\mathcal{G}$ . Dans la suite, on fixe un système de coordonnées locales :  $(x^0 = t, x^1, x^2, x^3)$ , et on utilise les indices :  $i, j, \dots \in \{1, 2, 3\}$  ;  $a, b, \dots \in \{0, 1, 2, 3\}$ . On rappelle que les symboles de Christoffel sont donnés par :

$$\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2} g^{cd} (\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab})$$

et la courbure Riemannienne par :

$$R_{abc}^d = \partial_a \Gamma_{bc}^d - \partial_b \Gamma_{ac}^d + \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ae}^d - \Gamma_{ac}^e \Gamma_{be}^d,$$

alors on écrit  $R(\partial_a, \partial_b)\partial_c = \nabla_{\partial_a} \nabla_{\partial_b} \partial_c - \nabla_{\partial_b} \nabla_{\partial_a} \partial_c = R_{abc}^d \partial_d$ . On utilise souvent la convention  $\mathcal{G}(R(\partial_a, \partial_b)\partial_c, \partial_d) = R_{abcd} = g_{de} R_{abc}^e$ . Pour distinguer,  ${}^g \Gamma_{ij}^k$  et  ${}^{\mathcal{G}} \Gamma_{ij}^k$  désignent les symboles de Christoffel associés aux métriques  $g$  et  $\mathcal{G}$  respectivement ; même chose pour la connexion et la courbure.

**Lemme 3.3.1.** *Avec les conventions de notation pour les indices indiqués ci-dessus, les symboles de Christoffel de la métrique  $\mathcal{G} = -f(x, t)^2 dt^2 + g(t)$  sont donnés par :*

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \partial_t \ln f & \Gamma_{0i}^0 &= \partial_i \ln f & \Gamma_{00}^i &= f g^{ij} \partial_j f \\ \Gamma_{0i}^k &= \frac{1}{2} g^{kj} \partial_t g_{ij} & \Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2f^2} \partial_t g_{ij} & {}^{\mathcal{G}} \Gamma_{ij}^k &= {}^g \Gamma_{ij}^k. \end{aligned}$$

On note par  $\nabla df$  la deuxième forme fondamentale de la fonction  $f$  considérée comme une fonction définie sur  $M^3$  (avec  $t$  fixé).

**Lemme 3.3.2.** *Avec les conventions de notation pour les indices indiqués ci-dessus, les composantes du tenseur de la courbure Riemannienne de  $\mathcal{G}$  sont données par :*

$$\begin{aligned} R_{0i0j} &= -\frac{1}{4}g^{kl}\partial_t g_{ik}\partial_t g_{jl} + \frac{1}{2}\partial_t(\partial_t g_{ij}) - f\nabla df(\partial_i, \partial_j) - \frac{1}{2}\partial_t \ln f \partial_t g_{ij} \\ R_{ijk}^0 &= \frac{1}{2f^2} (g_{lj}\partial_t \Gamma_{ik}^l - g_{li}\partial_t \Gamma_{jk}^l - \partial_i(\ln f)\partial_t g_{jk} + \partial_j(\ln f)\partial_t g_{ik}) \\ {}^{\mathcal{G}}R_{ijkl} &= {}^gR_{ijkl} + \frac{1}{4f^2}(\partial_t g_{jk}\partial_t g_{il} - \partial_t g_{ik}\partial_t g_{jl}). \end{aligned}$$

**Preuve** On va montrer la deuxième ligne de notre formule, les autres se déduisent facilement par un simple calcul ; on a :

$$\begin{aligned} R_{ijk}^0 &= \partial_i \Gamma_{jk}^0 - \partial_j \Gamma_{ik}^0 + \Gamma_{jk}^0 \Gamma_{j0}^0 + \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^0 - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^0 \\ &= \frac{1}{2f^2} \partial_t (\partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ik}) - \frac{1}{2f^2} (\partial_i(\ln f)\partial_t g_{jk} - \partial_j(\ln f)\partial_t g_{ik}) + \frac{1}{2f^2} (\Gamma_{jk}^l \partial_t g_{il} - \Gamma_{ik}^l \partial_t g_{jl}). \end{aligned}$$

Cependant, on note que

$$\partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ik} = 2g_{lj}\Gamma_{ik}^l + \partial_k g_{ij} = -2g_{lj}\Gamma_{jk}^l - \partial_k g_{ij},$$

alors

$$\partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ik} = g_{lj}\Gamma_{ik}^l - g_{li}\Gamma_{jk}^l.$$

On substitue cette égalité dans l'expression ci-dessus ; on obtient alors la formule du lemme.  $\square$

**Corollaire 3.3.1.** *La dérivée covariante de  $U$  le long d'une courbe isotrope définie par  $U$  est donnée par l'expression suivante :*

$$\nabla_{\partial_t + fU}^{\mathcal{G}} U = \frac{\partial U}{\partial t} + f\nabla_U^g U + \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_t g_{il})u^i \partial_k + \left( d \ln f(U) + \frac{1}{2}u^i u^j \partial_t g_{ij} \right) \partial_t,$$

où en écrivant  $U = u^i(t, x^k)\partial_i$ , on pose  $\partial U / \partial t = (\partial u^i / \partial t)\partial_i$ . D'autre part,

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_t + fU}(\partial_t + fU) &= f \text{grad}_g f + (\partial_t + fU)(f).U + \frac{f}{2}u^i g^{kj} \partial_t g_{ij} \partial_k \\ &\quad + (\partial_t \ln f + U(f))\partial_t. \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, on suppose que  $f : I \times M^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction et  $T$  est un 2-tenseur symétrique vérifiant  $T(U, U) = 0$ , les deux étant à déterminer. Ainsi, on introduit l'évolution couplée :

$$(3.11) \quad \begin{cases} (i) & \frac{\partial U}{\partial t} = -f\nabla_U^g U - \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_t g_{il})u^i \partial_k \\ (ii) & \frac{\partial g}{\partial t} = -2f\theta \odot (d \ln f|_{TM}) + 2T \end{cases}$$

où  $\theta = \theta(t)$  est la 1-forme duale de  $U(t)$ ,  $\theta(t) = g_t(U_t, \cdot)$  et  $U = u^i \partial_i$ , où  $(x^i)$  est un système de coordonnées locales dans  $M^3$ , et  $\alpha \odot \beta$  est le produit symétrique de deux 1-formes :  $\alpha \odot \beta = \frac{1}{2}(\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha)$ . On note que dans le cas d'une métrique plate (cas où  $f = 1$  et  $T = 0$ ), on récupère l'évolution (3.7)(ii). En général, le champ isotrope  $\partial_t + fU$  n'est plus géodésique, l'expression de  $\nabla_{(\partial_t + fU)}(\partial_t + fU)$  étant donnée par le corollaire 3.3.1.

On donne dans le lemme suivant des propriétés de base de l'évolution (3.11).

**Lemme 3.3.3.** *Soient  $M^3$  une variété riemannienne,  $g(t)$  une métrique riemannienne définie sur  $M^3$ ,  $U(t)$  un champ de vecteurs dans  $(M^3, g(t))$ . On suppose que le couple  $(g(t), U(t))$  varie selon l'équation (3.11). Alors :*

- (i)  $(\partial_t + fU)g(U, U) = 0$ , en particulier, si  $U$  est vecteur unitaire dans l'hypersurface  $t = 0$ , alors il l'est pour tout  $t$ .
- (ii)  $\nabla_{\partial_t + fU}^g U = 0$ , en particulier  $U$  est parallèle le long de chaque courbe isotrope déterminée par  $U$ .
- (iii) Le champ isotrope  $\partial_t + fU$  est géodésique si et seulement si

$$\widehat{T}(U) = -\frac{1}{2} \text{grad}_g f + \frac{1}{2} U(f)U$$

où  $\widehat{T}$  est déterminé en chaque point  $x \in M^3$  par  $g(\widehat{T}(E), F) = T(E, F)$  pour tout  $E, F \in T_x M^3$ .

**Preuve** La première partie du lemme est une conséquence directe de (3.11)(i), la deuxième découle du corollaire 3.3.1.

Pour la partie (iii), le champ  $\partial_t + fU$  est géodésique si et seulement si

$$\nabla_{(\partial_t + fU)}(\partial_t + fU) = \alpha(\partial_t + fU)$$

pour une fonction  $\alpha$ . Par le corollaire 3.3.1,

$$\begin{aligned} \nabla_{(\partial_t + fU)}(\partial_t + fU) &= f \text{grad}_g f + (\partial_t + fU)(f)U + \frac{f}{2} U^i g^{kj} \partial_t g_{ij} \partial_k + (\partial_t \ln(f) + U(f) \partial_t) \\ &= (\partial_t \ln(f) + U(f))(\partial_t + fU) + f \text{grad}_g f + \frac{f}{2} U^i g^{kj} (-\theta_i \partial_j f - \theta_j \partial_i f + 2T_{ij}) \partial_k \\ &= (\partial_t \ln(f) + U(f))(\partial_t + fU) + \frac{f}{2} \text{grad}_g f - \frac{f}{2} U(f)U + f \widehat{T}(U). \end{aligned}$$

Puisque les trois derniers termes de la partie droite sont tangents à  $M^3$  (il n'y a aucune composante de  $\partial/\partial t$ ), la condition de géodésité équivaut à l'annulation de leur somme, d'où l'énoncé du lemme.  $\square$

Soit le triplet  $(M^3, U(t), g(t))$  qui évolue suivant l'équation (3.11),  $\{X(t), Y(t)\}$  deux vecteurs tels que  $(X(t), Y(t), U(t))$  soit une base orthonormée tangente à  $M^3$ . Ces deux vecteurs évoluent avec l'évolution de la métrique et du vecteur  $U(t)$ . Soit  $Z = X - iY$ ,  $\sigma = \sigma(t, x)((t, x) \in I \times M^3)$ , la quantité définie par :

$$\sigma = g(\nabla_Z^g U, Z) = \mathcal{G}(\nabla_Z^g U, Z),$$

qui mesure l'écart pour que le feuilletage déterminé par  $U$  soit conforme. Cette quantité est connue sous le nom de "shear" dans les travaux de Penrose et Rindler [21]. On note qu'il y a une liberté dans le choix de  $X$  et  $Y$  qu'on peut exprimer comme ce qui suit.

**Lemme 3.3.4.** *Localement, dans un voisinage d'un point  $(t, x) \in I \times M^3$ , il existe un choix de  $X$  et  $Y$  pour lequel la fonction  $\sigma$  est une fonction à valeurs réelles.*

**Preuve** Par une rotation d'angle  $\theta = \theta(t, x)$ , la base  $\{X, Y\}$  qui est tangente à  $M^3$ , donne naissance à une nouvelle base  $\{\tilde{X} = X \cos \theta - Y \sin \theta, \tilde{Y} = X \sin \theta + Y \cos \theta\}$ . Alors  $\{\tilde{X}, \tilde{Y}\}$  est aussi une base orthonormée tangente à  $M^3$  et orthogonale à  $U$ ; donc si on suppose que  $\tilde{Z} = \tilde{X} - i\tilde{Y}$ , on peut définir la nouvelle quantité

$$\tilde{\sigma} = g(\nabla_{\tilde{Z}}^g U, \tilde{Z}).$$

On note que  $\sigma$  et  $\tilde{\sigma}$  sont différentes en général, pourtant, l'annulation de l'un des deux est une propriété invariante, indépendante du choix de  $\theta$ .

Maintenant, on va calculer la partie imaginaire de  $\tilde{\sigma}$ , qui n'est autre que

$$\sin 2\theta(g(\nabla_X^g U, X) - g(\nabla_Y^g U, Y)) + \cos 2\theta(g(\nabla_X^g U, Y) + g(\nabla_Y^g U, X)),$$

qui s'annule pour un choix convenable de  $\theta$ . Donc, on peut remplacer  $\sigma$  par la fonction à valeur réelle  $\tilde{\sigma}$ .  $\square$

La proposition suivante montre comment  $\sigma$  évolue le long d'une géodésique isotrope engendrée par  $U$ .

**Proposition 3.3.1.** *Soit le triplet  $(M^3, g(t), U(t))$  qui évolue selon les équations (3.11), alors l'évolution de  $\sigma : I \times M^3 \rightarrow \mathbb{C}$  le long d'une courbe isotrope engendrée par  $U$  est donnée par la formule :*

$$\begin{aligned} (\partial_t + fU)\sigma &= \alpha\sigma - \left(\frac{Z(f)}{2} + T(U, Z)\right)g(\nabla_U U, Z) \\ &\quad + Z(\ln f) \left(\frac{Z(f)}{2} - T(U, Z)\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}T(Z, Z)(2U(\ln f) + g(\nabla_{\tilde{Z}} U, Z)) \\ &\quad + \mathcal{G}(\mathcal{R}(\partial_t, Z)U, Z) - f\text{Ricci}(Z, Z) \end{aligned} \tag{3.12}$$

où  $\alpha : I \times M^3 \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction de classe  $C^\infty$ .

**Remarque 3.3.1.** *La quantité  $g(\nabla_{\tilde{Z}} U, Z) = -g(U, \nabla_X^g X + \nabla_Y^g Y - 2i[X, Y])$  est indépendante du choix de  $Z$ . En effet,  $\rho = g(U, \nabla_X^g X + \nabla_Y^g Y)$  est la courbure moyenne de la distribution orthogonale à  $U$  dans  $TM$  et  $\mathcal{V} = g(U, [X, Y])$  mesure l'intégrabilité de cette distribution. Donc la partie droite de (3.12) est une forme quadratique en  $z$ .*

**Preuve** Sauf indication contraire, dans ce qui suit, la connexion  $\nabla$  est la connexion de Levi-Civita relative à la métrique  $\mathcal{G}$ . Alors

$$\begin{aligned} (\partial_t + fU)\sigma &= \mathcal{G}(\nabla_{\partial_t + fU}\nabla_Z U, Z) + \mathcal{G}(\nabla_Z U, \nabla_{\partial_t + fU}Z) \\ &= \mathcal{G}(\mathcal{G}R(\partial_t + fU, Z)U + \nabla_Z \nabla_{\partial_t + fU}U + \nabla_{[\partial_t + fU, Z]}U, Z) + \mathcal{G}(\nabla_Z U, \nabla_{\partial_t + fU}Z) \\ &= \mathcal{G}(\mathcal{G}R(\partial_t + fU, Z)U + \nabla_{[\partial_t + fU, Z]}U, Z) + \mathcal{G}(\nabla_Z U, \nabla_{\partial_t + fU}Z), \end{aligned}$$

parce que, d'après le lemme 3.3.3(ii),  $\nabla_{\partial_t + fU}U = 0$ . On va maintenant évaluer les différentes quantités dans cette expression.

L'ensemble de champs de vecteurs  $\{Z, \bar{Z}, U, \partial_t/f\}$  forme une base de l'espace tangent complexe  $T^{\mathbb{C}}(I \times M^3)$ , avec les propriétés  $\mathcal{G}(Z, Z) = \mathcal{G}(\bar{Z}, \bar{Z}) = 0$  et  $\mathcal{G}(Z, \bar{Z}) = 2$ , les autres vecteurs sont orthonormaux. Ainsi on va pouvoir écrire :

$$\nabla_{\partial_t}Z = \alpha_1 Z + \beta_1 \bar{Z} + \gamma_1 U + \delta_1 (\partial_t/f),$$

pour des fonctions  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ , qui sont données par :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2}\mathcal{G}(\nabla_{\partial_t}Z, \bar{Z}), \\ \beta_1 &= \frac{1}{2}\mathcal{G}(\nabla_{\partial_t}Z, Z) = 0 \\ \gamma_1 &= \mathcal{G}(\nabla_{\partial_t}Z, U) = -\mathcal{G}(Z, \nabla_{\partial_t}U) - \mathcal{G}(Z, f\nabla_U^g U) \\ \delta_1 &= -\mathcal{G}(\nabla_{\partial_t}Z, \partial_t/f) = \frac{1}{f}\mathcal{G}(Z, \nabla_{\partial_t}\partial_t) = \frac{1}{f}\mathcal{G}(Z, fg^{kl}\partial_l f\partial_k) = \mathcal{G}(Z, grad_g f). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\nabla_{\partial_t}Z = \alpha_1 Z + fg(Z, \nabla_U^g U)U + g(Z, grad_g f)\partial_t/f.$$

En général, pour un vecteur  $E = e^i\partial_i$  tangent à  $M^3$ , on a :

$$\begin{aligned} \nabla_E \partial_t &= e_i \nabla_{\partial_i} \partial_t = e_i \Gamma_{i0}^0 \partial_t + e_i \Gamma_{i0}^k \partial_k \\ &= E(\ln f)\partial_t - \frac{f}{2}g(E, U)grad \ln f - \frac{f}{2}E(\ln f)U + e^i T_{ij} g^{kj} \partial_k. \end{aligned}$$

On écrit maintenant :

$$\nabla_U Z = \alpha_2 Z + \beta_2 \bar{Z} + \gamma_2 U + \delta_2 (\partial_t/f),$$

pour des fonctions  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$ , qui sont données par :

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{1}{2}\mathcal{G}(\nabla_U Z, \bar{Z}), \\ \beta_2 &= 0 \\ \gamma_2 &= \mathcal{G}(\nabla_U Z, U) = -g(Z, \nabla_U^g U) \\ \delta_2 &= -\mathcal{G}(\nabla_U Z, \partial_t/f) = \frac{1}{f}\mathcal{G}(Z, \nabla_U \partial_t) = -\frac{1}{2}Z(\ln f) + \frac{1}{f}T(U, Z). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\nabla_U Z = \alpha_2 Z - g(Z, \nabla_U^g U)U - \left( \frac{1}{2}Z(\ln f) - \frac{1}{f}T(U, Z) \right) \partial_t / f,$$

pour une fonction  $\alpha_2$ , de façon que

$$\nabla_{\partial_t + fU} Z = (\alpha_1 + f\alpha_2)Z + \frac{1}{f} \left( \frac{1}{2}Z(f) + T(U, Z) \right) \partial_t.$$

En procédant de la même manière, on obtient :

$$\nabla_Z U = \alpha_3 Z + \frac{1}{2}\sigma \bar{Z} - \frac{1}{f} \left( \frac{1}{2}Z(f) - T(U, Z) \right) \partial_t / f,$$

pour une fonction  $\alpha_3$ , aboutissant à

$$\mathcal{G}(\nabla_Z U, \nabla_{\partial_t + fU} Z) = (\alpha_1 + f\alpha_2)\sigma + \frac{1}{f} \left( \frac{Z(f)^2}{4} - T(U, Z)^2 \right).$$

Ensuite, on calcule

$$\begin{aligned} [\partial_t + fU, Z] &= \nabla_{\partial_t + fU} Z - \nabla_Z(\partial_t + fU) \\ &= (\alpha_1 + f\alpha_2 - f\alpha_3)Z - \frac{1}{2}f\sigma \bar{Z} - \frac{1}{2}Z(f)U - \hat{T}(Z) \end{aligned}$$

où pour chaque  $x \in M^3$ ,  $\hat{T} : T_x M^3 \rightarrow T_x M^3$  est l'application linéaire déterminée par  $g(\hat{T}(E), F) = T(E, F)$  pour tout  $E, F \in T_x M^3$ . Ce qui donne

$$\nabla_{[\partial_t + fU]} U = (\alpha_1 + f\alpha_2 - f\alpha_3)\nabla_Z U - \frac{1}{2}f\sigma \nabla_{\bar{Z}} U - \frac{1}{2}Z(f)\nabla_U U - \nabla_{\hat{T}(Z)} U,$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\nabla_{[\partial_t + fU]} U, Z) &= \left( \alpha_1 + f\alpha_2 - f\alpha_3 - \frac{1}{2}T(Z, \bar{Z}) - \frac{f}{2}g(\nabla_{\bar{Z}} U, Z) \right) \sigma \\ &\quad - \left( \frac{Z(f)}{2} + T(U, Z) \right) g(\nabla_U U, Z) - \frac{1}{2}T(Z, Z)g(\nabla_{\bar{Z}} U, Z). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} Ricci(Z, Z) &= Ricci(X, X) - Ricci(Y, Y) - 2i Ricci(X, Y) \\ &= g({}^g R(U, X)X, U) + g({}^g R(Y, X)X, Y) - g({}^g R(U, Y)Y, U) \\ &\quad - g({}^g R(X, Y)Y, X) - 2i g({}^g R(U, X)Y, U) \\ &= -g({}^g R(U, Z)U, Z). \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 3.3.2, on en déduit que,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}({}^g R(U, Z)U, Z) &= g({}^g R(U, Z)U, Z) + \frac{1}{4f^2} \left( \partial_t g(Z, U)^2 - \partial_t g(U, U) \partial_t g(Z, Z) \right) \\ &= -Ricci(Z, Z) + \frac{1}{f^2} \left( \left( \frac{Z(f)}{2} - T(U, Z) \right)^2 - U(f)T(Z, Z) \right). \end{aligned}$$



En combinant les différentes expressions, on obtient l'équation (3.12).  $\square$

Notre objectif dans l'équation (3.11) est de préserver la conformalité du feuilletage formé des courbes intégrales de  $U$ , et en même temps d'assurer que les courbes isotropes engendrées par  $\partial_t + fU$  soit géodésiques. Le théorème suivant est une conséquence de l'équation (3.12) et le lemme 3.3.3.

**Théorème 3.3.1.** *Soit le triplet  $(M^3, g(t), U(t))$  qui évolue selon les équations :*

$$\begin{cases} (i) & \frac{\partial U}{\partial t} = -f \nabla_U^g U - \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_t g_{kl}) U^i \partial_k \\ (ii) & \frac{\partial g}{\partial t} = -2\theta \odot (df|_{TM}) + 2T \end{cases}$$

où  $\hat{T}(U) = -\frac{1}{2} \text{grad}_g f + \frac{1}{2} U(f)U$  et  $f : I \times M^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $C^\infty$  ( $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ). Supposons que  $U_0$  est tangent à un feuilletage conforme sur  $(M^3, g_0)$ . Alors, les courbes intégrales du champ  $\partial_t + fU$  sont géodésiques ; et si

$$(3.13) \quad \mathcal{G}(\mathcal{G}R(\partial_t, Z)U, Z) - f \text{Ricci}(Z, Z) - \frac{1}{2} T(Z, Z) \left( g(\nabla_Z U, Z) + 2U(\ln f) \right) + \frac{1}{f} Z(f)^2 = 0,$$

alors, le champ de vecteurs  $U(t)$  est tangent à un feuilletage conforme sur  $(M^3, g(t))$  pour tout  $t \in I$ .

Nous allons appliquer ce théorème à des cas différents en choisissant convenablement la fonction  $f$  et le champ tensoriel  $T$ .

**Cas1 :**  $(M^3, g(0))$  est à courbure constante. Dans ce cas, on suppose que  $T = 0$  et que  $f \equiv 1$ . Avec ce choix :  $\frac{\partial g}{\partial t} = 0$ , et donc  $g$  reste constante. Puisque  $\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ij}^k = 0$ , il s'ensuit par le lemme 3.3.2 que  $R_{ijk}^0 = 0$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{G}(\mathcal{G}R(\partial_t, Z)U, Z) = 0$ . D'autre part, par l'hypothèse de courbure constante,  $\text{Ricci} = cg$  pour une constante  $c$ , d'où  $\text{Ricci}(Z, Z) = 0$ . Il s'ensuit que 3.13 est satisfaite et donc par le théorème 3.3.1, le champ  $U$  déterminé par l'évolution

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\nabla_U^g U$$

reste tangent à un feuilletage conforme.

**Exemple 3.3.1.** Soit  $\mathcal{S}$  la surface twistorielle paramétrée sous la forme

$$(z, w) \rightarrow \left[ -\frac{icz}{\sqrt{2}}, w, z, 1 \right]$$

où  $c \in \mathbb{C}$  est un nombre non-nul. Alors la relation d'incidence  $\xi_A = ix_{AA'} \eta^{A'}$  prend la forme :

$$\begin{cases} -cz = vz - \bar{q} \\ -i\sqrt{2}w = -qz + u \end{cases}$$

d'où

$$z = \frac{\bar{q}}{v+c}.$$

Alors, le champ spinoriel  $\mu_A$  tangent à la SFR correspondante est donné par

$$\mu_A = \rho \left( \frac{\bar{q}}{v+c} \right),$$

pour une fonction complexe  $\rho$ . Si  $\varphi_t : \mathbb{R}_t^3 \rightarrow \mathbb{C}$  est l'application semi-conforme ayant le champ  $U = \frac{1}{1+|z|^2}(|z|^2 - 1, 2z)$  tangent à ses fibres, alors

$$D_{AB}\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2\partial_q\varphi & -\partial_1\varphi \\ -\partial_1\varphi & -2\partial_{\bar{q}}\varphi \end{pmatrix} = \mu_A\mu_B = \begin{pmatrix} \rho^2\bar{q}^2 & \rho^2\bar{q}(v+c) \\ \rho^2\bar{q}(v+c) & \rho^2(v+c)^2 \end{pmatrix}.$$

On prend  $\rho = \frac{1}{q}$ , donc il faut intégrer :

$$D_{AB}\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \frac{v+c}{\bar{q}} \\ \frac{v+c}{\bar{q}} & \frac{(v+c)^2}{\bar{q}^2} \end{pmatrix},$$

ce qui est résolu par

$$\sqrt{2}\varphi = \frac{1}{2\bar{q}}(|q|^2 + (v+c)^2),$$

d'où,

$$\varphi_t(x_1, q) = \frac{1}{2\sqrt{2}\bar{q}}(|x|^2 - 2x_1c + t^2 - 2tx_1 + 2tc + c^2).$$

Par la proposition 3.2.1, on peut remplacer  $\varphi_t$  par une application conforme  $\psi_t = f_t \circ \varphi_t$ . On peut prendre pour  $f_t$  la dilatation  $f_t(w) = \frac{2\sqrt{2}}{t^2}w$ , d'où

$$\psi_t(x) = \frac{1}{t^2\bar{q}}(|x|^2 - 2x_1c + t^2 - 2tx_1 + 2tc + c^2)$$

qui tend vers la fonction limite  $\psi_\infty(x) = \frac{1}{\bar{q}}$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Observons que  $\psi_\infty$  est semi-conforme avec fibres géodésiques.

**Exemple 3.3.2.** Considérons l'exemple 1.2.3 de l'application semi-conforme  $\varphi : S^3 \rightarrow S^2$  donnée par

$$\varphi(\cos(s)e^{i\alpha}, \sin(s)e^{i\beta}) = (\cos \alpha(s), \sin \alpha(s)e^{i(k\alpha+l\beta)}).$$

On utilise les coordonnées  $(x_1, x_2, x_3) = (s, \alpha, \beta)$  sur  $S^3$  où  $s \in [0, \pi/2]$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Alors la métrique canonique sur  $S^3$  s'exprime par

$$g = ds^2 + \cos^2(s)d\alpha^2 + \sin^2(s)d\beta^2,$$

et on a les champs de vecteurs qui engendrent l'espace tangent :

$$\frac{\partial}{\partial s} = (-\sin(s)e^{i\alpha}, \cos(s)e^{i\beta}), \frac{\partial}{\partial \alpha} = (\cos(s)ie^{i\alpha}, 0), \frac{\partial}{\partial \beta} = (0, \sin(s)ie^{i\beta}).$$

Les symboles de Christoffel non-nuls sont donnés par :

$$\Gamma_{22}^1 = \sin(s)\cos(s), \Gamma_{33}^1 = -\sin(s)\cos(s), \Gamma_{12}^2 = -\tan(s), \Gamma_{13}^3 = \cot(s),$$

et le champ  $U_0$  déterminé par  $\varphi = \varphi_0$  est donné par :

$$U_0 = \frac{1}{\sqrt{k^2 \sin^2(s) + l^2 \cos^2(s)}}(-il \cos(s)e^{i\alpha}, ik \sin(s)e^{i\beta}) = \frac{1}{\sqrt{k^2 \sin^2(s) + l^2 \cos^2(s)}}\left(-l \frac{\partial}{\partial \alpha} + k \frac{\partial}{\partial \beta}\right).$$

On écrit dans la suite  $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha}$ ,  $\partial_\beta = \frac{\partial}{\partial \beta}$  et  $\partial_s = \frac{\partial}{\partial s}$ . On fait l'hypothèse que  $U_t = c\partial_s + a\partial_\alpha + b\partial_\beta$  pour des fonctions  $a, b, c$  qui ne dépendent que de  $s$  et de  $t$ . Alors :

$$\nabla_{U_t} U_t = \left[(a^2 - b^2) \sin(s) \cos(s) + c \frac{\partial c}{\partial s}\right] \partial_s + \left[c \frac{\partial a}{\partial s} - 2ca \tan(s)\right] \partial_\alpha + \left[c \frac{\partial b}{\partial s} + 2cb \cot(s)\right] \partial_\beta.$$

L'équation  $\frac{\partial U}{\partial t} = -\nabla_{U_t} U_t$  devient alors

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} = -(a^2 - b^2) \sin(s) \cos(s) - c \frac{\partial c}{\partial s} \\ \frac{\partial a}{\partial t} = -c \frac{\partial a}{\partial s} + 2ca \tan(s) \\ \frac{\partial b}{\partial t} = -c \frac{\partial b}{\partial s} - 2cb \cot(s) \end{cases}$$

avec les conditions initiales :

$$c(s, 0) = 0, a(s, 0) = -\frac{l}{\sqrt{k^2 \sin^2(s) + l^2 \cos^2(s)}}, b(s, 0) = \frac{k}{\sqrt{k^2 \sin^2(s) + l^2 \cos^2(s)}}.$$

La théorie des équations aux dérivées partielles de premier ordre nous assure l'existence d'une solution, mais il est difficile de la trouver explicitement.

**Cas 2 :** Le cas de courbure non-constante. Par le lemme 3.3.4, on peut supposer que, dans le voisinage d'un point, la fonction  $\sigma$ , qui mesure l'écart pour que le feuilletage défini par  $U$  soit conforme, est réelle. L'équation (3.12) qui décrit la propagation de  $\sigma$  le long d'une courbe isotrope engendrée par  $U$ , est alors une équation réelle qui s'écrit sous la forme :

$$(3.14) \quad (\partial_t + fU)\sigma = \frac{1}{2}(\alpha + \bar{\alpha})\sigma + F,$$

où  $F$  est la partie réelle de

$$\begin{aligned} & - \left( \frac{Z(f)}{2} + T(U, Z) \right) g(\nabla_U U, Z) + Z(\ln f) \left( \frac{Z(f)}{2} - T(U, Z) \right) \\ & - \frac{1}{2} T(Z, Z) \left( g(\nabla_{\bar{Z}} U, Z) + 2U(\ln f) \right) + \mathcal{G}({}^{\mathcal{G}}R(\partial_t, Z)U, Z) - f \operatorname{Ricci}(Z, Z). \end{aligned}$$

Afin de respecter les critères du théorème 3.3.1, on choisit :

$$T = -\theta \odot (df|_{TM}) + U(f)\theta^2.$$

On voit alors que

$$\widehat{T}(U) = -\frac{1}{2} \operatorname{grad}_g f + \frac{1}{2} U(f)U$$

et que  $T(Z, Z) = 0$ . On doit alors trouver  $f$  (réelle et non nulle) tel que la partie réelle de

$$\frac{1}{f} Z(f)^2 + \mathcal{G}({}^{\mathcal{G}}R(\partial_t, Z)U, Z) - f \operatorname{Ricci}(Z, Z)$$

s'annule. Cette condition équivaut à l'équation du 1ère ordre en  $f$  :

$$\begin{aligned} (3.15) \quad & \frac{1}{f} (X(f)^2 - Y(f)^2) + \mathcal{G}({}^{\mathcal{G}}R(\partial_t, X)U, X) - \mathcal{G}({}^{\mathcal{G}}R(\partial_t, Y)U, Y) \\ & - f (\operatorname{Ricci}(X, X) - \operatorname{Ricci}(Y, Y)) = 0. \end{aligned}$$

En appliquant le théorème 3.3.1, on obtient la conséquence suivante.

**Corollaire 3.3.2.** *Soit  $M^3$  une variété munie d'une métrique riemannienne  $g_0$  et d'un champ de vecteurs unitaires  $U_0$  tangent à un feuilletage conforme dans  $M^3$ . Soit  $(g(t, x), U(t, x))$  une solution du système :*

$$(3.16) \quad \begin{cases} (i) & \frac{\partial U}{\partial t} = -f \nabla_U^g U - \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_t g_{il}) u^i \partial_k \\ (ii) & \frac{\partial g}{\partial t} = -4\theta \odot (df|_{TM}) + 2U(f)\theta^2 \end{cases}$$

qui satisfait la condition initiale  $g(0) = g_0$  et  $U(0) = U_0$ , où  $\theta = \theta(t)$  est la 1-forme duale à  $U(t)$  et où  $f = f(t, x)$  est une fonction non-nulle vérifiant l'équation (3.15). Alors, les courbes isotropes engendrées par  $U$  sont géodésiques,  $U$  est parallèle le long de ces courbes et tangent à un feuilletage conforme pour chaque  $t$ .

On remarque qu'en général, les termes du type  $\mathcal{G}({}^{\mathcal{G}}R(\partial_t, X)U, X)$  de l'équation (3.15) dépendent des dérivées  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}$ . Il est alors difficile d'affirmer l'existence et l'unicité des solutions de (3.16) en général.

**Cas 3.** *Le cas où la distribution orthogonale à  $U$  est intégrable.* Dans ce cas, on suppose

que la distribution  $U^\perp$  de dimension 2, orthogonale à  $U$  dans  $TM^3$  est intégrable et reste intégrable pendant l'évolution :  $g(U, [X, Y]) = 0$ . On suppose alors que  $f \equiv 1$  et que

$$T = \frac{2}{\rho} (Ricci - \mathcal{G}(\mathcal{G}R(\partial_t, \cdot)U, \cdot))|_{U^\perp},$$

où  $\rho = g(U, \nabla_X^g X + \nabla_Y^g Y)$  est la courbure moyenne de  $U^\perp$ . On obtient la conséquence suivante.

**Corollaire 3.3.3.** *Soit  $M^3$  une variété munie d'une métrique riemannienne  $g_0$  et d'un champ de vecteurs unitaires  $U_0$  tangent à un feuilletage conforme dans  $M^3$ . Soit  $(g(t, x), U(t, x))$  une solution du système :*

$$(3.17) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (i) & \frac{\partial U}{\partial t} = -\nabla_U^g U - \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_t g_{il})u^i \partial_k \\ (ii) & \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{2}{\rho} (Ricci - \mathcal{G}(\mathcal{G}R(\partial_t, \cdot)U, \cdot))|_{U^\perp} \end{array} \right.$$

qui satisfait la condition initiale  $g(0) = g_0$  et  $U(0) = U_0$ , où  $\rho = g(U, \nabla_X^g X + \nabla_Y^g Y)$  est la courbure moyenne de la distribution  $U^\perp$  dans  $TM^3$ , qu'on suppose non-nulle et où on suppose que cette distribution reste intégrable pendant l'évolution :  $g(U, [X, Y]) = 0$  pour tout  $t$ . Alors, a) les courbes intégrales de  $\partial_t + fU$  sont géodésiques isotropes ; b) le champ de vecteurs  $U(t)$  est parallèle le long de ces courbes ; et c) le feuilletage déterminé par  $U(t)$  est conforme.

# Chapitre 4

## Propriétés combinatoires d'un graphe fini

On montre dans ce chapitre comment la théorie des twisteurs, introduite par R. Penrose, pour décrire les champs dans l'espace-temps, peut être formulée dans le cas d'un graphe fini. Dans le cas des graphes finis, le champ de base est une application semi-conforme (à valeurs complexes) définie sur un graphe (appelée fonction holomorphe). On suppose que cette théorie fournit une base de la théorie des champs combinatoires qui permettrait de combiner les meilleures caractéristiques de celle de twisteurs et des réseaux de spin (les rayons lumineux sont les objets les plus fondamentaux plutôt que les points de l'espace-temps) et que la plupart des structures de base sont combinatoires dans leur nature.

On commence à définir la notion de graphes, qu'on représente par  $\Gamma = (V, E)$ , où  $V$  représente les sommets et  $E$  les arêtes. On étudie aussi l'évolution, par l'équation de la chaleur, des applications définies sur un graphe, et on montre que l'énergie de telles applications diminue sous l'équation de la chaleur, c'est-à-dire que si on a une famille d'applications  $\{f_n\}$  définies sur un graphe fini  $\Gamma = (V, E)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$ , vérifiant l'équation  $\frac{\partial f_n}{\partial n} = -\Delta f_n$ , alors,

$$\frac{\partial}{\partial n}(df_n, df_n) \leq 0.$$

On rappelle aussi la définition des applications semi-conformes entre graphes, introduite par Urakawa. Dans le cas continu, une application semi-conforme est une généralisation d'une application conforme dans le plan, qui est évidemment harmonique. On introduit aussi la notion de fonction holomorphe sur un graphe à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , et on étudie ses propriétés. Or une fonction harmonique définie sur un graphe fini est nécessairement constante, ce qui n'est pas vrai dans le cas des fonctions holomorphes. Une notion d'holomorphie dans un contexte discret a été introduite par Duffin (1968) [11] et par I. Bobenko et C. Mercat (2001) [6] ici dans le cadre des graphes appelés rhombiques ou quad-graphs, qui sont constitués de faces rhombiques. On introduit la notion des graphes duaux, en se motivant de la correspondance twistorielle de Penrose. Or, pour un graphe  $\Gamma$  sur lequel on définit une fonction semi-conforme  $\varphi : V(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ , où  $V(\Gamma)$  est l'ensemble des sommets de  $\Gamma$ , on peut associer un graphe dual  $T_\Gamma$ , dont les sommets sont les arêtes du graphe  $\Gamma$ , ainsi une fonction  $\psi : V(T_\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ . La correspondance entre  $\Gamma$  et son dual  $T_\Gamma$  est l'analogue de la correspondance twistorielle de Penrose entre un rayon de lumière et un twisteur.

## 4.1 Graphe fini

Un graphe fini  $\Gamma$  d'ordre  $n$  est un ensemble  $V$  de cardinal  $n$  muni d'une relation binaire  $\sim$ . Pour deux éléments  $x$  et  $y$  dans  $V$ , on écrit  $x \sim y$  pour indiquer que  $x$  et  $y$  sont voisins, ou sont rejoints par une arête et on représente géométriquement cette relation par un segment qui lie  $x$  et  $y$ . On suppose dans la suite que la relation  $\sim$  est une relation symétrique, alors les arêtes ne sont pas dirigées, bien qu'une grande partie de notre discussion s'applique également à des graphes dirigés. On préfère utiliser le terme "dirigé" plutôt que le terme habituel "orienté" ; le dernier terme sera réservé à une notion d'orientation d'un graphe (non dirigé), semblable plutôt à l'orientation d'une variété, que l'on va définir plus tard. On suppose aussi que la relation  $\sim$  n'est pas réflexive, c'est-à-dire que le graphe  $\Gamma$  ne contient pas de boucles. On représente les arêtes par un sous-ensemble  $E$  du produit symétrique  $V \odot V$  et ainsi on note le graphe  $\Gamma$  par la paire  $\Gamma = (V, E)$ . On représente une arête joignant deux sommets  $x$  et  $y$  par  $\overline{xy}$ , ou, si on impose une direction, on la représente par  $\vec{xy}$ .

Une généralisation de notre théorie est de munir chaque arête par un nombre réel, appelé sa longueur et de considérer alors ce qu'on appelle les graphes métriques. On peut même aller plus loin, en supposant qu'un angle est défini entre deux arêtes adjacentes, cependant, cette supposition devient une approximation de la géométrie (semi-)riemannienne, et serait contraire à notre objectif de développer une théorie purement combinatoire.

Plusieurs notions de la géométrie riemannienne peuvent être reformulées dans la théorie combinatoire des graphes. On cite deux références, le livre de Chung [10] et l'article de Jost [19]. On va donner dans la suite des notions qui seront utiles pour notre développement.

Soit  $\Gamma = (V, E)$  un graphe,  $x \in V$ , alors on note par  $m(x)$  le nombre d'arêtes dont  $x$  est un sommet. Un graphe est dit régulier si  $m = m(x)$  est une constante. On définit l'espace tangent en un point  $x \in V$  par  $T_x\Gamma := \{\vec{xy} : \overline{xy} \in E\}$  ; ceci montre que tout élément de  $T_x\Gamma$  est une arête dirigée, avec  $x$  comme point de départ et  $y \sim x$  comme point d'arrivée.

### 4.1.1 Propriétés des fonctions définies sur un graphe fini

Dans la suite,  $\Gamma = (V, E)$  désigne un graphe fini d'ordre  $n$ .

**Définition 4.1.1.** Soit  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^N$  une fonction définie sur un graphe  $\Gamma$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$ , alors pour un vecteur  $X = \vec{xy} \in T_x\Gamma$ , on définit la dérivée directionnelle de direction  $X$  par :

$$d\varphi_x(X) = \varphi(y) - \varphi(x).$$

On note que l'on pourrait étendre la notion de l'espace tangent en incluant toutes les combinaisons linéaires des arêtes  $\vec{xy}$ ,  $y \sim x$ , pour obtenir un espace vectoriel. Mais on préfère utiliser un concept discret de l'espace tangent.

**Définition 4.1.2.** Soit  $S$  une fonction définie sur l'espace tangent en  $x$  à un graphe, à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$ , alors on définit sa divergence en  $x$  par la quantité :

$$\operatorname{div} S = \sum_{y \sim x} S(x\vec{y}),$$

et sa co-dérivée par  $d^*S = -\operatorname{div} S$ .

Si pour tout élément  $x \in V$ , étant donnée l'application  $S = S_x : T_x \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^N$ , alors on peut voir  $S$  comme une 1-forme à condition que  $S(x\vec{y}) = -S(y\vec{x})$ . En particulier, si  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^N$  est une fonction, alors  $d\varphi$  est une 1-forme et l'on a :

$$\begin{aligned} d^*d\varphi &= - \sum_{y \sim x} (\varphi(y) - \varphi(x)) \\ &= m(x)\varphi(x) - \sum_{y \sim x} \varphi(y) \\ &= m(x)\Delta\varphi(x), \end{aligned}$$

où le *Laplacien* de  $\varphi$  est donné par la quantité :

$$\Delta\varphi(x) := \varphi(x) - \frac{1}{m(x)} \sum_{y \sim x} \varphi(y).$$

On note que notre définition de Laplacien diffère de celui de Jost par son signe [19].

Effectivement, le Laplacien mesure la différence entre la valeur d'une fonction en  $x$  et la moyenne de ses valeurs sur les sommets voisins.

Le lemme suivant se démontre facilement.

**Lemme 4.1.1.** *Soit  $\rho : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^N$  une application anti-symétrique ( $\rho(x, y) = -\rho(y, x)$ ), alors*

$$\sum_{x \in V} \sum_{y \sim x} \rho(x, y) = 0.$$

**Corollaire 4.1.1.** *Pour une fonction  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^N$ , on a  $\sum_{x \in V} d^*d\varphi(x) = 0$ . En particulier, si  $m=m(x)$  est constante, alors  $\sum_{x \in V} \Delta\varphi(x) = 0$ .*

Cette dernière propriété est l'analogue du fait que l'intégrale du Laplacien d'une fonction s'annule le long d'une variété riemannienne compacte sans bord.

Soit  $f, g : V \rightarrow \mathbb{R}^N$  deux fonctions à valeurs dans un espace Euclidien. Alors on définit le produit scalaire de  $f$  et  $g$  par

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x \in V} m(x) \langle f(x), g(x) \rangle_{\mathbb{R}^N},$$

où  $\langle, \rangle_{\mathbb{R}^N}$  est le produit scalaire standard dans  $\mathbb{R}^N$ . En particulier, si  $\varphi, \psi : V \rightarrow \mathbb{C}$ , alors

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \operatorname{Re} \sum_{x \in V} m(x) \varphi(x) \overline{\psi(x)}.$$



On définit aussi le produit scalaire de la dérivée des deux fonctions  $f, g : V \rightarrow \mathbb{R}^N$  pour tout point  $x \in V$ , par :

$$(df_x, dg_x)_x = \sum_{y \sim x} \langle f(y) - f(x), g(y) - g(x) \rangle_{\mathbb{R}^N},$$

et leur produit scalaire global par

$$(df, dg) = \sum_{\overline{xy} \in E} \langle df(\overline{xy}), dg(\overline{xy}) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{x \in V} \sum_{y \sim x} \langle f(y) - f(x), g(y) - g(x) \rangle_{\mathbb{R}^N},$$

le facteur de la moitié apparaît, étant donné que chaque arête est comptée deux fois dans cette dernière somme.

**Lemme 4.1.2.** *Soient  $\varphi$  et  $\psi$  deux fonctions définies sur  $V$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$ , alors*

$$\langle \varphi, \Delta \psi \rangle = \langle \Delta \varphi, \psi \rangle,$$

*c'est-à-dire que l'opérateur  $\Delta$  est auto-adjoint.*

**Preuve** On a :

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \Delta \psi \rangle &= \sum_{x \sim y} \langle \varphi(x), \sum_{y \sim x} (\psi(x) - \psi(y)) \rangle_{\mathbb{R}^N} \\ &= \sum_{x \in V} \sum_{y \sim x} \langle \varphi(x) - \varphi(y), \psi(x) \rangle_{\mathbb{R}^N} \\ &\quad + \sum_{x \in V} \sum_{y \sim x} \{ \langle \varphi(y), \psi(x) \rangle_{\mathbb{R}^N} - \langle \varphi(x), \psi(y) \rangle_{\mathbb{R}^N} \} \\ &= \langle \Delta \varphi, \psi \rangle, \end{aligned}$$

où la deuxième somme de la deuxième ligne s'annule d'après le lemme 4.1.1. □

**Lemme 4.1.3.** *Soient  $\varphi$  et  $\psi$  deux fonctions définies sur  $V$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$ , alors*

$$\langle \varphi, \Delta \psi \rangle = (d\varphi, d\psi).$$

**Preuve** On a :

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \Delta \psi \rangle &= \sum_{x \in V} \langle \varphi(x), \sum_{y \sim x} (\psi(x) - \psi(y)) \rangle_{\mathbb{R}^N} \\ &= \sum_{x \in V} \sum_{y \sim x} \{ \langle \varphi(x) - \varphi(y), \psi(x) - \psi(y) \rangle_{\mathbb{R}^N} + \langle \varphi(y), \psi(x) - \psi(y) \rangle_{\mathbb{R}^N} \} \\ &= 2(d\varphi, d\psi) + \sum_{x \in V} \sum_{y \sim x} \langle \varphi(y), \psi(x) - \psi(y) \rangle_{\mathbb{R}^N} \\ &= 2(d\varphi, d\psi) + \sum_{x \in V} \langle \psi(x), \sum_{y \sim x} (\varphi(y) - \varphi(x)) \rangle_{\mathbb{R}^N} \\ &\quad + \sum_{x \in V} \sum_{y \sim x} (\langle \psi(x), \varphi(x) \rangle_{\mathbb{R}^N} - \langle \psi(y), \varphi(y) \rangle_{\mathbb{R}^N}) \\ &= 2(d\varphi, d\psi) - \langle \psi, \Delta \varphi \rangle \quad \text{d'après le lemme 4.1.1} \\ &= 2(d\varphi, d\psi) - \langle \varphi, \Delta \psi \rangle \quad \text{d'après le lemme 4.1.2.} \end{aligned}$$

□

Les lemmes 4.1.2 et 4.1.3 sont bien connus, mais on les présente ici avec nos propres arguments.

Nous rappelons maintenant des propriétés du spectre du Laplacien sur un graphe fini dont nous avons besoin dans la suite ; voir [10] et [19] pour les preuves.

Soit  $\Gamma = (V, E)$  un graphe d'ordre  $n$ .

1. Il existe  $n$  valeurs propres de  $\Delta : 0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$  ; avec

$$\lambda_k = \inf_{f \in H_k \setminus \{0\}} \frac{(df, df)}{\langle f, f \rangle}$$

où

$$H_0 = \{f : V \rightarrow \mathbb{R}\}$$

$$H_k = \{f : V \rightarrow \mathbb{R} : \langle f, f_i \rangle = 0 \text{ pour } i \leq k-1\}$$

où les  $\{f_i\}$  forment une base orthonormée des fonctions propres de  $\Delta$ .

2.  $\lambda_{n-1} = \max_{f \neq 0} \frac{(df, df)}{\langle f, f \rangle}$  et  $\lambda_i \leq 2$  pour tout  $i$ . En effet, puisque  $(f(x) - f(y))^2 \leq 2(f(x)^2 + f(y)^2)$ , alors  $\lambda_{n-1} \leq 2$  (voir la preuve de la proposition 4.1.1 ci-dessous). De plus,  $\Delta f = 2f$  si et seulement si  $f(y) = -f(x)$  pour tout  $x$  et pour tout  $y \sim x$ .

3. Si  $\Gamma$  est connexe, alors  $\lambda_1 > 0$ .

4.  $f$  est constante si et seulement si  $\Delta f = 0$ . En effet ; par induction, pour  $n = 1$ , l'hypothèse est vraie. Supposons que celle-ci soit vraie jusqu'au rang  $n - 1$ , c'est à dire qu'il n'existe pas d'applications harmoniques non constantes sur un graphe fini de d'ordre  $n - 1$  ; et montrons, à présent que cette hypothèse est vérifiée sur un graphe fini d'ordre  $n$ . Or, il existe  $f(x)$  une plus grande valeur de  $f$ , or  $f(x) = \frac{1}{m(x)} \sum_{y \sim x} f(y)$  ; Alors,  $f(y) = f(x)$  pour tout  $y \sim x$ , sinon  $f(y) < f(x)$ , ce qui contredit l'hypothèse de récurrence sur le graphe formé par les  $y \sim x$  de cardinal strictement plus petite que  $n$ .

### 4.1.2 L'équation de la chaleur d'un graphe fini

On va décrire maintenant la dynamique sur un graphe  $\Gamma = (V, E)$ . Pour cela, on suppose qu'il existe une famille de fonctions  $\{f_n\}$ , définies sur un graphe et à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$ , paramétrisées par un nombre  $n \in \mathbb{N}$  ou  $n \in \mathbb{Z}$ . Pour un sommet  $x \in V$ , on définit la dérivée discrète :

$$\frac{\partial f_n}{\partial n} = f_{n+1}(x) - f_n(x).$$

De même, pour toute fonction  $u = u(n)$ , on écrit  $\frac{\partial u}{\partial n} = u(n+1) - u(n)$ . On note que l'on peut commuter la dérivée directionnelle et la dérivée discrète.

**Lemme 4.1.4.** *Pout tout  $x \in V$ ,  $X = (x\vec{y}) \in T_x V$ , on a*

$$d\left(\frac{\partial f_n}{\partial n}\right)(X) = \frac{\partial}{\partial n}(df_n(X)).$$

**Preuve** On a :

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\partial f_n}{\partial n}\right)(X) &= \frac{\partial f_n}{\partial n}(y) - \frac{\partial f_n}{\partial n}(x) \\ &= f_{n+1}(y) - f_n(y) - f_{n+1}(x) + f_n(x) \\ &= df_{n+1}(x\vec{y}) - df_n(x\vec{y}) \\ &= \frac{\partial}{\partial n}(df_n(X)). \end{aligned}$$

□

Les propriétés suivantes sont faciles à démontrer.

**Lemme 4.1.5.** *Soit  $f_n, g_n : V \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , deux fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$ ,  $x$  un élément de  $V$ , alors,*

$$\begin{aligned} (i) \quad \frac{\partial}{\partial n} \langle f_n(x), g_n(x) \rangle_{\mathbb{R}^N} &= \left\langle f_{n+1}(x), \frac{\partial g_n}{\partial n}(x) \right\rangle_{\mathbb{R}^N} + \left\langle \frac{\partial f_n}{\partial n}(x), g_n(x) \right\rangle_{\mathbb{R}^N} \\ &= \left\langle f_n(x), \frac{\partial g_n}{\partial n}(x) \right\rangle_{\mathbb{R}^N} + \left\langle \frac{\partial f_n}{\partial n}(x), g_{n+1}(x) \right\rangle_{\mathbb{R}^N}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad \frac{\partial}{\partial n} \langle f_n, g_n \rangle &= \left\langle f_{n+1}, \frac{\partial g_n}{\partial n} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f_n}{\partial n}, g_n \right\rangle \\ &= \left\langle f_n, \frac{\partial g_n}{\partial n} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f_n}{\partial n}, g_{n+1} \right\rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (iii) \quad \frac{\partial}{\partial n} (df_n, dg_n) &= \left( d\frac{\partial f_n}{\partial n}, dg_{n+1} \right) + \left( df_n, d\frac{\partial g_n}{\partial n} \right) \\ &= \left( d\frac{\partial f_n}{\partial n}, dg_n \right) + \left( df_{n+1}, d\frac{\partial g_n}{\partial n} \right). \end{aligned}$$

On suppose que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une famille de fonctions définies sur un graphe  $\Gamma = (V, E)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$ , paramétrisée par les entiers naturels (ou éventuellement par les entiers relatifs).

**Définition 4.1.3.** *On dit que la famille de fonctions  $f_n$  est une famille qui vérifie l'équation de la chaleur si*

$$\frac{\partial f_n}{\partial n}(x) = -\Delta f_n(x),$$

*pour tout  $x \in V$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .*

Il y a eu des études pour cette équation dans le cas des graphes finis et infinis [10].

Soit  $f_n$  une famille de fonctions vérifiant l'équation de la chaleur. Alors cette famille vérifie :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_n}{\partial n} &= f_{n+1}(x) - f_n(x) \\ &= -\Delta f_n \\ &= -f_n(x) + \frac{1}{m(x)} \sum_{y \sim x} f_n(y).\end{aligned}$$

On en déduit que, pour une famille de fonctions  $f_n : V \rightarrow \mathbb{R}^N$ , l'équation de la chaleur est équivalente à :

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{m(x)} \sum_{y \sim x} f_n(y).$$

On montre dans la suite, que le poids total est conservé pour une famille de fonctions qui est solution de cette équation.

**Définition 4.1.4.** Soit  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un graphe fini, on définit le poids total de la fonction  $f$  par :

$$M(f) = \sum_{x \in V} m(x)f(x)$$

**Lemme 4.1.6.** Soit  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une famille de fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$  qui vérifie l'équation de la chaleur, alors, le poids total est conservé :

$$M(f_{n+1}) = M(f_n), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

**Preuve** On a :

$$\begin{aligned}M(f_{n+1}) &= \sum_{x \in V} m(x)f_{n+1}(x) \\ &= \sum_{x \in V} \sum_{y \sim x} f_n(y) \\ &= \sum_{x \in V} \left( m(x)f_n(x) - m(x)f_n(x) + \sum_{y \sim x} f_n(y) \right) \\ &= M(f_n) - \sum_{x \in V} \sum_{y \sim x} (f_n(x) - f_n(y)) \\ &= M(f_n).\end{aligned}$$

□

**Définition 4.1.5.** L'énergie au point  $x$  d'une application  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^N$  est définie par :  $e(f)(x) = \sum_{y \sim x} \|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{R}^N}^2$ . L'énergie totale est donnée par  $E(f) = \sum_{x \in V} e(f)(x)$ .

On montre dans la proposition suivante que l'énergie d'une application définie sur un graphe diminue sous l'équation de la chaleur. Cette proposition et le théorème qui le suit, donnent une analogue partielle dans le cas des graphes du théorème de Eells-Sampson dans le cas continu : soit  $\phi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$  une application  $C^\infty$  entre variétés riemanniennes compactes, dont la courbure sectionnelle de  $N$  est négative ; alors sous l'équation de la chaleur :  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \tau(\phi)$ , l'application évolue vers une application harmonique [13].

**Proposition 4.1.1.** *Soit  $\Gamma = (V, E)$  un graphe fini,  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une famille de fonctions définies sur  $\Gamma$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , vérifiant l'équation de la chaleur  $\frac{\partial f_n}{\partial n} = -\Delta f_n$ , alors*

$$\frac{\partial}{\partial n}(df_n, df_n) \leq 0,$$

*avec égalité si et seulement si, ou bien  $\Delta f_n = 0$ , ou bien s'il existe un vecteur constant  $v \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\Delta(f_n + v) = 2(f_n + v)$ , c'est-à-dire que, sous l'addition d'une constante, chaque composante de  $f_n$  est un vecteur propre du Laplacien associé à la valeur propre 2.*

On va se servir du lemme suivant pour montrer notre proposition.

**Lemme 4.1.7.** *Soit  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^N$ , alors :*

$$(4.1) \quad \sum_{x \in V} \sum_{y \sim x} (||f(x)||^2 + ||f(y)||^2) = 2 \sum_{x \in V} m(x) ||f(x)||^2,$$

où  $||\cdot||$  note la norme canonique dans  $\mathbb{R}^N$ .

**Preuve** On fixe  $x = x_0 \in V$  et soit  $y_1, y_2, \dots, y_{m(x)} \sim x_0$ . Alors

$$\sum_{y \sim x_0} (||f(x_0)||^2 + ||f(y)||^2) = m(x) ||f(x_0)||^2 + ||f(y_1)||^2 + \dots + ||f(y_{m(x)})||^2.$$

D'une manière similaire, si  $x = y_k$ , on obtient

$$\sum_{y \sim y_k} (||f(y_k)||^2 + ||f(y)||^2) = m(y_k) ||f(y_k)||^2 + ||f(x_0)||^2 + \dots \quad .$$

Ces sommes de  $k = 1, \dots, m(x)$ , donnent toutes les possibilités du terme  $||f(x_0)||^2$  dans la somme (4.1), ce qui donne au total  $2m(x) ||f(x_0)||^2$ . Or,  $x_0$  est choisi arbitrairement, d'où le résultat.  $\square$

On va maintenant démontrer la proposition.

**Preuve** On remarque tout d'abord que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n}(df_n, df_n) &= \left( d \left( \frac{\partial f_n}{\partial n} \right), df_{n+1} \right) + \left( df_n, d \left( \frac{\partial f_n}{\partial n} \right) \right) && \text{d'après le lemme 4.1.5} \\ &= \left\langle \frac{\partial f_n}{\partial n}, \Delta f_{n+1} + \Delta f_n \right\rangle && \text{d'après le lemme 4.1.3} \\ &= -\langle \Delta f_n, \Delta f_{n+1} + \Delta f_n \rangle. \end{aligned}$$

Or, le fait que  $\frac{\partial f_n}{\partial n} = f_{n+1} - f_n$  et l'hypothèse que  $f_n$  est solution de l'équation de la chaleur, implique que  $\Delta f_{n+1} = \Delta f_n - \Delta \Delta f_n$ , alors :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial n}(df_n, df_n) &= -\langle \Delta f_n, \Delta f_{n+1} + \Delta f_n \rangle \\
 &= -\langle \Delta f_n, 2\Delta f_n - \Delta \Delta f_n \rangle \\
 &= -2\langle \Delta f_n, \Delta f_n \rangle + \langle \Delta f_n, \Delta \Delta f_n \rangle \\
 (4.2) \qquad &= -2\langle \Delta f_n, \Delta f_n \rangle + (d\Delta f_n, d\Delta f_n).
 \end{aligned}$$

Pour deux vecteurs  $a, b \in \mathbb{R}^N$ , on a  $\|a\|^2 + \|b\|^2 \geq -2\langle a, b \rangle_{\mathbb{R}^N}$  avec égalité si et seulement si  $a = -b$ . En particulier,  $\langle a - b, a - b \rangle_{\mathbb{R}^N} = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\langle a, b \rangle_{\mathbb{R}^N} \leq 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$ , avec égalité si et seulement si  $a = -b$ . On en déduit que

$$\begin{aligned}
 (d\Delta f_n, d\Delta f_n) &= \frac{1}{2} \sum_{x \in V} \sum_{y \sim x} \langle \Delta f_n(y) - \Delta f_n(x), \Delta f_n(y) - \Delta f_n(x) \rangle_{\mathbb{R}^N} \\
 &\leq \sum_{x \in V} \sum_{y \sim x} (\|\Delta f_n(x)\|^2 + \|\Delta f_n(y)\|^2) \\
 &= 2 \sum_{x \in V} m(x) \|\Delta f_n(x)\|^2 \quad \text{d'après le lemme 4.1.7} \\
 &= 2\langle \Delta f_n, \Delta f_n \rangle,
 \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si  $\Delta f_n(x) = -\Delta f_n(y)$  pour tout  $x \in V$  et pour tout  $x \sim y$ . Ce qui montre l'inégalité  $\frac{\partial}{\partial n}(df_n, df_n) \leq 0$  de la proposition.

On suppose maintenant qu'on a l'égalité, alors, en écrivant  $\psi = -\Delta f_n$ , on devrait avoir  $\psi(x) = -\psi(y)$  pour tout  $y \sim x$ . En particulier,  $\Delta \psi(x) = \psi(x) - \frac{1}{m(x)} \sum_{y \sim x} \psi(y) = 2\psi(x)$ .

Ainsi, ou bien  $\psi = 0$  dans ce cas  $f_n$  est une constante, ou bien  $\psi$  est un vecteur propre du Laplacien associé à la valeur propre 2 ; alors  $\Delta(\Delta f_n - 2f_n) = 0$ . Or, une fonction harmonique sur un graphe fini est constante, alors

$$(4.3) \qquad \Delta f_n - 2f_n = c,$$

où  $c \in \mathbb{R}^N$  est un vecteur constant, ce qui montre que  $f_n + \frac{c}{2}$  est un vecteur propre du Laplacien associé à cette valeur propre 2.

Réciproquement, si  $\Delta f_n - 2f_n = c$  pour un vecteur constant  $c \in \mathbb{R}^N$ , alors, d'après la première

partie de la preuve,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial n}(df_n, df_n) &= -2\langle \Delta f_n, \Delta f_n \rangle + (d\Delta f_n, d\Delta f_n) \\
&= -2\langle 2f_n + c, 2f_n + c \rangle + (2df_n, 2df_n) \\
&= -2\langle 2f_n + c, 2f_n + c \rangle + 4\langle f_n, \Delta f_n \rangle \\
&= -2\langle 2f_n + c, 2f_n + c \rangle + 4\langle f_n(x), 2f_n(x) + c \rangle \\
&= -2\langle 2f_n + c, c \rangle \\
&= -2\langle \Delta f_n, c \rangle = 0.
\end{aligned}$$

□

**Exemple 4.1.1.** Soit  $\Gamma$  le graphe avec trois sommets  $\{x_1, x_2, x_3\}$  et deux arêtes :  $x_1 \sim x_2$  et  $x_2 \sim x_3$ . Soit  $f_0$  la fonction définie par  $f_0(x_2) = 0$  et  $f_0(x_1) = f_0(x_3) = 1$ . Alors sous l'équation de la chaleur :  $\frac{\partial f_n}{\partial n} = -\Delta f_n$ , avec condition initiale  $f_0$ , on voit que les valeurs de  $f_n$  sur les sommets sont alternées entre 0 et 1 :  $f_n(x_2) = 0$  pour  $n$  pair,  $f_n(x_2) = 1$  pour  $n$  impair ;  $f_n(x_1) = f_n(x_3) = 0$  pour  $n$  impair,  $f_n(x_1) = f_n(x_3) = 1$  pour  $n$  pair. En fait,  $\Delta$  admet la valeur propre 2, et la fonction  $f_0 - \frac{1}{2}$  est fonction propre correspondante. Sous l'évolution,  $(df_n, df_n)$  reste constante.

**Théorème 4.1.1.** Soient  $\Gamma = (V, E)$  un graphe fini connexe,  $\{f_n\}$  une famille de fonctions définies sur  $\Gamma$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$  vérifiant l'équation de la chaleur  $\frac{\partial f_n}{\partial n} = -\Delta f_n$ , et telle que le Laplacien n'admet pas la valeur propre 2. Alors,  $f_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  existe et est une application constante, en particulier, elle est harmonique.

**Preuve** D'abord on montre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (df_n, df_n) = 0$ . Par la proposition 4.1.1, la suite des  $(df_n, df_n)$  est décroissante et puisqu'elle est bornée inférieurement, elle présente une limite

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} (df_n, df_n) \geq 0.$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial n}(df_n, df_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [(df_{n+1}, df_{n+1}) - (df_n, df_n)] = 0,$$

d'où, par l'équation 4.2 :

$$(4.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} ((d\Delta f_n, d\Delta f_n) - 2\langle \Delta f_n, \Delta f_n \rangle) = 0.$$

Mais par hypothèse, la plus grande valeur propre est  $< 2$ , et donc par la propriété 2 énoncée à la fin de la partie 4.1.1, si  $\Delta f_n \neq 0$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$(4.5) \quad (d\Delta f_n, d\Delta f_n) \leq (2 - \varepsilon)\langle \Delta f_n, \Delta f_n \rangle.$$

En combinant les équations 4.4 et 4.5 il s'ensuit que, soit il existe  $n$  tel que  $\Delta f_n = 0$  et donc  $f_n$  est constante avec  $f_{n+r} = f_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \Delta f_n, \Delta f_n \rangle = 0$ , c'est-à-dire que

$$(4.6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta f_n = 0.$$

Par le lemme 4.1.3 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (df_n, df_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \Delta f_n \rangle = 0.$$

Il suffit d'étudier une des composantes de  $f_n$ , et donc sans perdre la généralité, on peut supposer que chaque  $f_n : V \rightarrow \mathbb{R}$  (c'est-à-dire que  $N = 1$ ). On écrit  $\overline{f_n}$  pour la fonction

$$\overline{f_n}(x) = f_n(x) - \frac{1}{\sum_{x \in V} m(x)} \sum_{x \in V} m(x) f_n(x),$$

dont la moyenne est égale à zéro :  $\langle \overline{f_n}, \mathbf{1} \rangle = 0$ , où  $\mathbf{1} : V \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction identiquement égale à 1. Il s'ensuit que, dans la notation de la propriété 1 à la fin de la partie 4.1.1,  $\overline{f_n} \in H_1$  et par l'inégalité de Poincaré (une conséquence de la propriété 1),

$$\lambda_1 \leq \frac{(d\overline{f_n}, d\overline{f_n})}{\langle \overline{f_n}, \overline{f_n} \rangle} = \frac{(df_n, df_n)}{\langle \overline{f_n}, \overline{f_n} \rangle},$$

d'où

$$\lambda_1 \langle \overline{f_n}, \overline{f_n} \rangle \leq (df_n, df_n).$$

Par l'hypothèse que  $\Gamma$  est connexe et par la propriété 3, on a  $\lambda_1 > 0$  ; puisque  $\lim_{n \rightarrow \infty} (df_n, df_n) = 0$  ; il s'ensuit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \overline{f_n}, \overline{f_n} \rangle = 0,$$

et donc que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{f_n} = 0.$$

Maintenant, on applique le lemme 4.1.6 qui affirme que sur un graphe fini, pour une famille de fonctions vérifiant l'équation de la chaleur, le poids total est conservé, c'est-à-dire que

$$\sum_{x \in V} m(x) f_n(x) = c,$$

où  $c$  est une constante indépendante de  $n$ . On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{c}{\sum_{x \in V} m(x)},$$

pour tout  $x \in V$ , et la preuve est achevée. □

En général, un graphe régulier n'admet pas la valeur propre 2. Par exemple, le 1-squelette



du N-cube l'admet, mais le 1-squelette du tétraèdre ne l'admet pas. D'autre part, la fonction  $f$  définie sur le 1-squelette du N-cube, qui prend les valeurs  $\pm 1$  de telle sorte que ses valeurs sont opposées sur des sommets adjacents, vérifie la propriété stipulant que son évolution par l'équation de la chaleur :  $\frac{\partial f_n}{\partial n} = -\Delta f_n$ ,  $f_0 = f$  satisfait  $f_n(x) = (-1)^n$  si  $f_0(x) = 1$  et  $f_n(x) = (-1)^{n+1}$  si  $f_0(x) = -1$ . On voit que la suite  $\{f_n\}$  ne converge pas et que la condition que 2 ne soit pas une valeur propre dans le théorème est nécessaire.

### 4.1.3 Courbure d'un graphe fini

Éventuellement, on envisage non seulement d'avoir une dynamique sur les fonctions définies sur un graphe, mais que le graphe lui même évoluerait en temps discret. La partie 3.3.3 décrivant le cas continu, suggère qu'une évolution par la courbure peut jouer un rôle. Dans le cas d'une surface riemannienne  $M$  compacte sans bord, le théorème de Gauss-Bonnet [7] permet de retrouver la caractéristique d'Euler  $\chi(M)$  de la variété à partir de la courbure de Gauss  $K(M)$ ,

$$\int_M K dv_g = 2\pi\chi(M).$$

On va maintenant donner une formule analogue, mais dans le cas des graphes. En effet, pour un graphe fini  $\Gamma = (V, E)$ , tel que  $|V| = n$ , on désigne par  $K(x) = 2 - m(x)$  la courbure en  $x$ . On ne trouve pas cette notion de courbure dans l'étude des graphes. Soit  $K(\Gamma) = \sum_{x \in \Gamma} K(x)$  la courbure totale de  $\Gamma$ . On désigne par  $\chi(\Gamma) = |V| - |E| = n - |\{x\bar{y}, x \sim y\}| = n - \frac{1}{2}|\{\overline{xy}, x \sim y\}|$  la caractéristique d'Euler de  $\Gamma$ .

**Proposition 4.1.2.** *Soit  $\Gamma = (V, E)$  un graphe fini,  $K(\Gamma)$  sa courbure totale,  $\chi(\Gamma)$  sa caractéristique d'Euler, alors*

$$K(\Gamma) = 2\chi(\Gamma).$$

**Preuve** Puisque  $m(x) = |\{y \in \Gamma, y \sim x\}|$ , on en déduit que

$$\begin{aligned} K(\Gamma) &= \sum_{x \in \Gamma} (2 - m(x)) \\ &= 2n - \sum_{x \in V} |\{y \in \Gamma; y \sim x\}| \\ &= 2(n - \frac{1}{2}|\{\overline{xy}, y \sim x\}|) \\ &= 2\chi(\Gamma). \end{aligned}$$

□

**Exemple 4.1.2.** *On considère un cube; c'est un graphe fini tel que  $n = |V| = 8$  et  $|E| = 12$ . On peut calculer facilement  $\chi(G) = -4$ . Pour tout  $x \in G$ , on a  $m(x) = 3$ , alors  $K(x) = -1$*

pour tout  $x$ . Donc  $K(G) = -8$ , ce qui montre que  $K(G) = 2\chi(G)$ .

On peut faire le même calcul pour des graphes plus compliqués, tels que le dodécaèdre, le tétraèdre tronqué, etc.

*N.B.* Un dodécaèdre est un solide composé de 12 faces, 30 arêtes et 20 sommets. Tandis que le tétraèdre tronqué est un solide d'Archimède. Il possède 4 faces hexagonales régulières, 4 faces triangulaires régulières, 12 sommets et 18 arêtes.

## 4.2 Applications semi-conformes et fonctions holomorphes sur un graphe

On rappelle que la notion d'applications semi-conformes entre les graphes a été introduite par H. Urakawa en 2000 [25]. Notre objectif est d'introduire une notion de fonctions holomorphes sur un graphe et de l'utiliser pour donner une caractérisation alternative d'application semi-conforme. Une notion d'holomorphicité dans un contexte discret a été introduite par Duffin (1968) [11] et I. Bobenko et C. Mercat [6]. Pour deux graphes  $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$  et  $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$  (non nécessairement finis), une fonction  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  définie entre les sommets est une application entre graphes si, pour tout  $x \sim y$  ( $x, y \in V_1$ ) on a : ou bien  $\varphi(x) = \varphi(y)$ , ou bien  $\varphi(x) \sim \varphi(y)$ . Dans ce cas, on va choisir la notation :  $\varphi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ .

**Définition 4.2.1.** Soit  $\varphi : \Gamma_1 = (V_1, E_1) \rightarrow \Gamma_2 = (V_2, E_2)$  une application entre deux graphes. On dit que  $\varphi$  est semi-conforme en un point  $x \in V_1$  si, en notant par  $z = \varphi(x)$ , pour tout  $z' \sim z$ , le nombre

$$\lambda(x, z') := \#\{x' \sim x; \varphi(x') = z'\}$$

est bien défini et dépend seulement de  $x$  (c'est-à-dire qu'il est indépendant du choix de  $z'$ ). Dans ce cas, on le note par  $\lambda(x) = \lambda(x, z')$ . On dit que l'application  $\varphi$  est semi-conforme si elle est semi-conforme en tout point  $x \in V_1$ . Si  $x \in V_1$  est tel que  $\varphi(y) = \varphi(x)$  pour tout  $y \sim x$ , on suppose que  $\lambda(x) = 0$  et l'on obtient une fonction bien définie,  $\lambda : V_1 \rightarrow \mathbb{N}$ , appelée la dilatation de l'application  $\varphi$ .

La définition ci-dessus peut se prolonger pour les applications entre graphes métriques, où  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont deux graphes munis de deux fonctions de longueurs  $\ell_1$  et  $\ell_2$  définies sur les arêtes  $E_1$  et  $E_2$  respectivement. La dilatation est alors remplacée par la fonction

$$\lambda(x) = \ell_2(\overline{\varphi(x)z'}) \sum_{x' \sim x, \varphi(x')=z'} \frac{1}{\ell_1(\overline{xx'})}.$$

Un automorphisme d'un graphe  $\Gamma = (V, E)$  est une application bijective  $\varphi : V \rightarrow V$  qui vérifie :  $x \sim y$  si et seulement si  $\varphi(x) \sim \varphi(y)$ . Ce qui montre qu'un automorphisme est une application semi-conforme de dilatation est égale à 1. On le considère comme l'analogue d'une isométrie dans la géométrie riemannienne.

**Exemple 4.2.1.** Soient le graphe  $\Gamma_1$  avec neuf sommets,  $\Gamma_2$  avec cinq sommets et  $\varphi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ ,  $\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 2, \varphi(3) = 3, \varphi(4) = 4, \varphi(5) = 1, \varphi(6) = 2, \varphi(7) = 3, \varphi(8) = 4, \varphi(9) = 5$ .

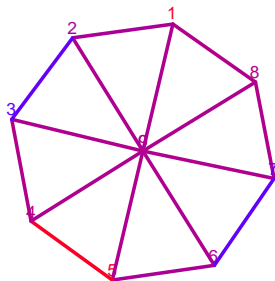


FIGURE 4.1 – Le graphe  $\Gamma_1$

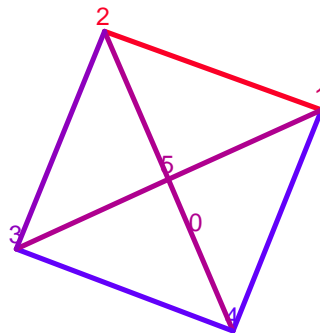


FIGURE 4.2 – Le graphe  $\Gamma_2$

Alors  $\varphi$  est semi-conforme avec dilatation 1 en tout sommet, sauf en  $x=9$  où elle a une dilatation égale à 2.

On introduit maintenant l'un des concepts les plus importants dans notre étude : la notion de fonction holomorphe définie sur un graphe à valeurs dans l'espace des nombres complexes.

**Définition 4.2.2.** Soit  $\Gamma = (V, E)$  un graphe (non nécessairement fini), alors une fonction  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe en  $x \in V$  si

$$\sum_{y \sim x} (d\varphi(\overline{xy}))^2 = \sum_{y \sim x} (\varphi(y) - \varphi(x))^2 = 0,$$

on l'appelle une fonction holomorphe locale. On dit que  $\varphi$  est holomorphe, si elle est holomorphe en tout sommet  $x \in V$ .

On considère une paire  $(\Gamma, \varphi)$  d'un graphe  $\Gamma = (V, E)$  et d'une fonction holomorphe  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{C}$  comme un champ physique. On va voir après comment on peut introduire une dynamique dans le champ. On note que pour une fonction holomorphe  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{C}$ , la fonction  $c\varphi + a$  l'est aussi pour tous nombres complexes  $a, c \in \mathbb{C}$ .

La figure 4.3 montre un graphe qui admet une fonction holomorphe  $\varphi$ , dont les valeurs sont données par le tableau (Y).

Tableau(Y)

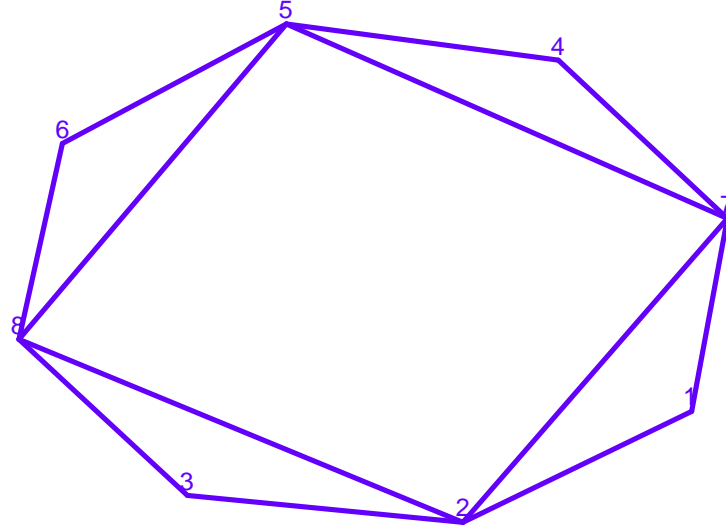


FIGURE 4.3 – Exemple d'un graphe fini muni d'une application holomorphe donnée par le tableau  $Y$

Sommets	Valeurs de $\varphi$
1	0
2	1
3	$1 + i$
4	$1 + i$
5	$1 + 2i$
6	$2 + 2i$
7	i
8	$2 + i$

Cet exemple montre comment on peut construire un nouveau graphe muni d'une fonction holomorphe à partir de deux autres graphes munis de fonctions holomorphes. En effet, soient  $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ ,  $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$  deux graphes, et  $\varphi_1 : \Gamma_1 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi_2 : \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{C}$  deux fonctions holomorphes. On suppose qu'il existe des sommets  $x_1, \dots, x_r \in V_1$ , et  $y_1, \dots, y_r \in V_2$  tels que,  $\varphi_1(x_j) = \varphi_2(y_j)$  pour  $j = 1, \dots, r$ . Alors, on construit un nouveau graphe  $\Gamma = (V, G)$  dont les sommets  $V = \{x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_m, y_{r+1}, \dots, y_n\}$  avec les relations de  $E_1$  et où  $x_j \sim y_s$  si  $y_j \sim y_s$  dans  $E_2$  pour  $j = 1, \dots, r$ . Dans l'exemple, le rectangle  $\{2, 7, 5, 8\}$  est identifié avec le graphe cyclique  $\{1, 7, 4, 5, 6, 8, 3, 2\}$ . A cause de la normalisation  $\varphi \rightarrow c\varphi + a$ , on peut toujours modifier les fonctions holomorphes sur deux graphes donnés, afin de les "attacher"

en au moins deux sommets.

Urakawa a démontré qu'une application entre graphes est semi-conforme si et seulement si elle préserve les fonctions harmoniques locales (c'est-à-dire que le pull back par  $\varphi$  d'une fonction harmonique en un point  $y$  est aussi harmonique en  $x \in \varphi^{-1}(y)$ ). Nous donnons une caractérisation plus simple basée sur la notion de fonction holomorphe.

**Proposition 4.2.1.** *Soit  $\varphi : \Gamma_1 = (V_1, E_1) \rightarrow \Gamma_2 = (V_2, E_2)$  une application entre graphes. Alors  $\varphi$  est semi-conforme si et seulement si elle préserve les fonctions holomorphes locales. En particulier, si  $\varphi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$  est semi-conforme et si  $f : \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe, alors  $f \circ \varphi$  est aussi holomorphe.*

**Preuve** Supposons  $\varphi$  semi-conforme. Soit  $f$  holomorphe en  $y \in V_2$ . Il s'ensuit que

$$\sum_{y' \sim y} (f(y') - f(y))^2 = 0.$$

Considérons la fonction  $f \circ \varphi$ . On montre qu'elle est holomorphe en un point  $x$  tel que  $\varphi(x) = y$ . Alors

$$\begin{aligned} \sum_{x' \sim x} ((f \circ \varphi)(x') - (f \circ \varphi)(x))^2 &= \sum_{x' \sim x} (f(\varphi(x')) - f(y))^2 \\ &= \lambda(x) \sum_{y' \sim y} (f(y') - f(y))^2 = 0 \end{aligned}$$

par la semi-conformalité de  $\varphi$ .

Réciproquement, supposons que  $\varphi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$  préserve les fonctions holomorphes locales. Soient  $y \in V_2$  et  $x \in \varphi^{-1}(y) \in V_1$ . Soient  $y_1, y_2 \sim y$ . On veut démontrer que  $\lambda(x, y_1) = \lambda(x, y_2)$ . Soit  $f$  la fonction holomorphe en  $y$  donnée par  $f(y) = 0$ ,  $f(y_1) = i$ ,  $f(y_2) = 1$  et  $f(y') = 0$  pour tout  $y' \sim y$  avec  $y' \neq y_1, y_2$ . Par hypothèse,  $f \circ \varphi$  est holomorphe en  $x$ , d'où, si  $x_1, \dots, x_r \sim x$  vérifient  $\varphi(x_1) = \dots = \varphi(x_r) = y_1$  et  $x_{r+1}, \dots, x_{r+s} \sim x$  vérifient  $\varphi(x_{r+1}) = \dots = \varphi(x_{r+s}) = y_2$ , on a

$$\sum_{x' \sim x} ((f \circ \varphi)(x') - (f \circ \varphi)(x))^2 = -r + s,$$

qui s'annule, d'où  $r = s$  et  $\lambda(x, y_1) = \lambda(x, y_2)$ . Puisque  $y_1, y_2 \sim y$  sont arbitrairement choisis, on conclut que  $\varphi$  est semi-conforme.  $\square$

Un fonction holomorphe peut être vue comme un cas particulier d'un objet plus général, c'est une 1-forme isotope.

**Définition 4.2.3.** Soit  $w$  une 1-forme définie sur un graphe  $\Gamma = (V, E)$ . Alors on dit que  $w$  est isotope si

$$\sum_{y \sim x} (w(\overrightarrow{xy}))^2 = 0,$$

pour tout sommet  $x \in V$ .

Alors, la dérivée  $d\varphi$  d'une fonction holomorphe  $\varphi$  est une 1-forme isotope. Réciproquement, nous avons besoin d'une condition d'intégrabilité sur la 1-forme afin qu'elle soit la dérivée d'une fonction. Cela exige que  $\sum_k w(e_k)$  s'annule autour de n'importe quel cycle  $\{e_k\}_k$  (un cycle est une suite d'arêtes dirigées  $\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$  qui vérifie la propriété selon laquelle le point d'arrivée de  $e_k$  est le point de départ de  $e_{k+1}$ , de façon à ce que  $e_{r+1}$  soit identifiée avec  $e_1$ ). Si c'est le cas, on définit alors la fonction  $\varphi$  sur un sommet fixe  $x_0$ , c'est-à-dire qu'on donne la valeur  $\varphi_0$  en  $x_0$ , et on suppose alors que  $\varphi(y) = \varphi_0 + w(\overrightarrow{x_0 y})$  pour tout  $y \sim x_0$ . On continue avec cette manipulation pour tous les sommets afin d'obtenir une fonction holomorphe  $\varphi$ .

Nous terminons cette partie en discutant de quelques notions liées à la nôtre : la notion de graphe muni d'une fonction holomorphe.

Un graphe quantique est un graphe métrique, tel que chaque arête contient une solution de l'équation de Shrödinger à une dimension, avec des conditions compatibles sur chaque sommet. On peut voir la paire  $(\Gamma, \varphi)$  d'un graphe et d'une fonction holomorphe définie sur ce graphe comme une structure similaire, où on remplace une solution de l'équation de Shrödinger sur l'arête  $\overrightarrow{xy}$  par l'amplitude  $\varphi(y) - \varphi(x)$ . La condition de compatibilité sur chaque sommet sera  $\sum_{y \sim x} (\varphi(y) - \varphi(x))^2 = 0$ .

La notion de réseau de spin a été introduite par R. Penrose dans les années 1960 (voir [22]), avec l'idée fondamentale que l'espace-temps et la théorie quantique se déduisent des principes combinatoires. Un réseau de spin est un graphe régulier de degré 3. ( $m(x) = 3$ ) dont les arêtes sont munies d'entiers qui représentent deux fois le moment angulaire. La notion a été généralisée par Rovelli et Smolin [24], qui définissent un réseau de spin comme un graphe dirigé dont les bords sont associés à des représentations irréductibles d'un groupe de Lie compact et dont les sommets sont associés à des intermédiaires qui relient ces différentes représentations adjacentes. Un réseau de spin, plongé dans une variété, peut être utilisé pour définir une fonction sur l'espace des connexions sur cette variété.

Une autre construction importante est la suivante. On donne  $n$  nombres complexes  $z_1, z_2, \dots, z_n$  qui vérifient  $\sum_{k=1}^n z_k^2 = 0$ , alors on peut construire un cube de dimension  $n$ , de façon qu'il existe une projection orthogonale de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{C}$ , qui envoie le sommet  $v_0 \in \mathbb{R}^n$  vers le point  $0 \in \mathbb{C}$  et les sommets voisins  $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$  vers  $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ . Inversement, si on donne une projection orthogonale  $\pi$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{C}$ , alors les nombres complexes  $z_k = \pi(v_k - v_0)$  vérifient

l'équation  $\sum z_k^2 = 0$ . Cette propriété est connue sous le nom : théorème fondamental de Gauss de l'axonométrie [16] et dans le cas lorsque  $n = 3$ , la projection des sommets dans le plan s'appelle la projection orthographique. Il a été démontré par M. Eastwood et R. Penrose que la projection des sommets des autres polyèdres réguliers vérifie d'autres équations polynomiales. Par exemple, l'équation  $(z_1 + \dots + z_n)^2 - (n+1)(z_1^2 + \dots + z_n^2) = 0$  est vérifiée par la projection orthogonale des sommets d'un tétraèdre régulier [12]. Si l'on suppose que  $z_i = \phi(v_i)$  avec  $z_1 = \phi(v_1) = 0$ , on peut alors écrire cette équation de la façon suivante en  $x = v_1$  :

$$((n-1)\Delta\phi(x))^2 - (n+1)\sum_{y \sim x} (\phi(y) - \phi(x))^2 = 0$$

en effet avec le tétraèdre sur  $n$  sommets, on a  $m(x) = n - 1$ . Aussi l'équation n'est que valable en un seul point  $x = v_1$ .

**Exemple 4.2.2.** On définit une fonction holomorphe sur le graphe composé d'un cube à  $n$  dimension qui sera donnée par la projection des sommets dans l'espace complexe.

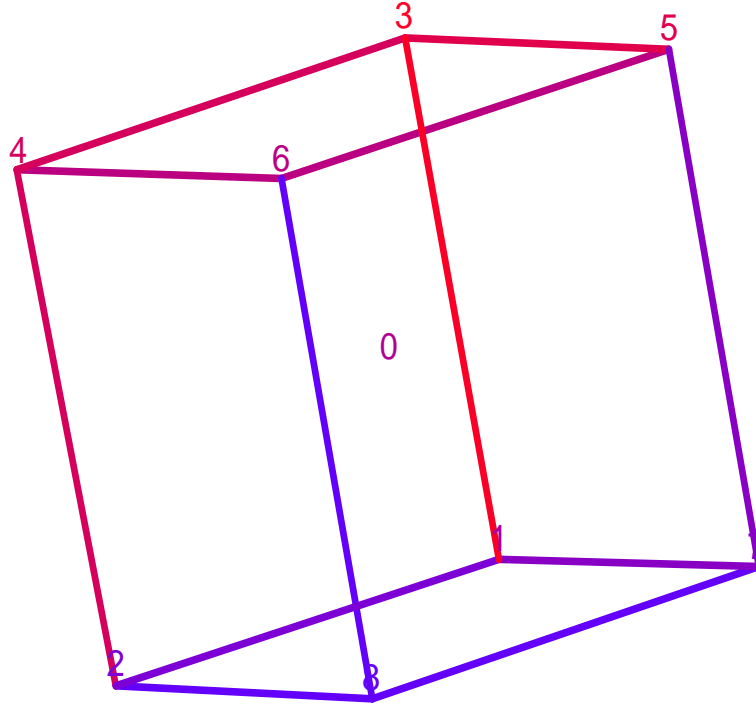


FIGURE 4.4 – Le cube muni d'une fonction holomorphe donnée par le tableau (X)

*Tableau(X)*

<i>Sommets</i>	<i>Valeurs de <math>\varphi</math></i>
<i>1</i>	<i>0</i>
<i>2</i>	<i>1</i>
<i>3</i>	$\sqrt{2}i$
<i>4</i>	$1+\sqrt{2}i$
<i>5</i>	$1+\sqrt{2}i$
<i>6</i>	$\sqrt{2}i$
<i>7</i>	<i>1</i>
<i>8</i>	<i>0</i>

*Par exemple, dans le cas d'un cube de dimension 3, les valeurs sur les sommets de ce cube (4.4) sont données par le tableau X ci-dessus.*



### 4.3 Champ spinoriel sur un graphe

On va montrer dans cette section, comment, à partir d'un graphe fini, muni d'une fonction holomorphe, on peut récupérer un champ spinoriel. Ainsi on fait le lien avec la partie 3.2 dans le cas continu.

Soit  $\Gamma = (V, E)$  un graphe régulier fini, tel que  $m = m(x) = \text{constante}$  pour tout  $x \in V$ . Une *orientation* sur  $\Gamma$  est une coloration des arêtes du graphe avec les nombres  $1, 2, \dots, m$ . En d'autres termes, on associe à chaque arête, un nombre  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$  de telle façon que l'on n'associe pas le même nombre à deux arêtes adjacentes. Par exemple, le cube à 3-dimensions est coloré de la façon suivante :

Arête	Couleur
$\overline{12}$	1
$\overline{13}$	2
$\overline{17}$	3
$\overline{24}$	2
$\overline{28}$	3
$\overline{34}$	3
$\overline{35}$	1
$\overline{46}$	1
$\overline{56}$	3
$\overline{57}$	2
$\overline{68}$	2
$\overline{78}$	1

D'autre part, le graphe régulier de degré 3 qui admet 6 sommets  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  et 9 arêtes  $E = \{\overline{12}, \overline{13}, \overline{15}, \overline{24}, \overline{26}, \overline{34}, \overline{35}, \overline{46}, \overline{56}\}$ , ne peut pas être orienté.

Soit  $\Gamma = (V, E)$  un graphe régulier de degré 3 orienté par les couleurs  $\{1, 2, 3\}$ . On suppose que  $\Gamma$  est muni d'une 1-forme isotope  $w$ . Alors, à chaque sommet  $x \in V$ , on peut associer un triplet de nombres complexes  $\xi(x) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , tel que  $\xi_k = w(x\vec{y}_k)$ , où  $y_1, y_2, y_3 \sim x$  et où on suppose que l'arête  $\overline{xy_k}$  est de couleur  $k$  ( $k = 1, 2, 3$ ). Or  $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0$ , alors la matrice symétrique

$$(\Omega_{AB}) := \begin{pmatrix} -\xi_2 - \xi_3 i & \xi_1 \\ \xi_1 & \xi_2 - \xi_3 i \end{pmatrix} \quad (A, B \in \{0, 1\})$$

est de déterminant nul, donc elle s'écrit sous la forme  $\Omega_{AB} = \mu_A \mu_B$ , pour un spineur  $(\mu_A) \in \mathbb{C}^2$ . On a donc un champ spinoriel  $\mu_A$  sur le graphe  $\Gamma$  qui donne un cas analogue à celui d'un champ spinoriel sur  $\mathbb{R}^3$  qui engendre une SFR dans l'espace de Minkowski, décrite dans le chapitre 2.

On peut procéder par analogie avec la partie 3.2 et on construit l'analogue de champ de

vecteurs  $U$  (tangent aux feuilletages conforme dans le cas continu) sur chaque sommet. En effet,  $\mu = \mu_0/\mu_1 = -(\xi_2 + i\xi_3)/\xi_1$  représente la direction de  $U$ , on a alors

$$U = \frac{1}{|\mu|^2 + 1}(|\mu|^2 - 1, 2\mu) = \frac{1}{|\xi_1|^2 + |\xi_2 + i\xi_3|^2}(|\xi_2 + i\xi_3|^2 - |\xi_1|^2, -\overline{\xi_1}(\xi_2 + i\xi_3)).$$

Il est possible maintenant de considérer l'analogie discrète de l'équation (3.8)

$$d\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial n}\right)(U) = -\Delta\varphi_n,$$

pour une famille de fonctions  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . Or,  $\partial\varphi_n/\partial n = \varphi_{n+1} - \varphi_n$ , alors, puisque  $d\varphi_n(U) = 0$ , notre équation est équivalente à :

$$(4.7) \quad d\varphi_{n+1}(U) = -\Delta\varphi_n.$$

Dans le cas où  $\varphi_n$  est une fonction holomorphe, par analogie avec le théorème 3.2.1 on se demande quand est-ce que l'équation (4.7) détermine une fonction  $\varphi_{n+1}$  qui l'est aussi. On n'a pas de résultat général pour cette situation, mais on peut affirmer que c'est le cas lorsque le graphe est un cube à 3-dimensions. Le tableau suivant construit, avec succès, une fonction holomorphe  $\varphi_{n+1}$  à partir de la fonction holomorphe  $\varphi_n$  donnée dans le tableau(X), qui est unique à une constante près.

Sommet	$\xi$	$U$	$d\varphi_{n+1}(U)$	$\Delta\varphi_n$	$\varphi_{n+1}$
1	$(1, \sqrt{2}i, 1)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{n+1}(2) - \varphi_{n+1}(7))$	$-\frac{\sqrt{2}}{3}(\sqrt{2} + i)$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$
2	$(-1, \sqrt{2}i, -1)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{n+1}(1) - \varphi_{n+1}(8))$	$\frac{\sqrt{2}}{3}(\sqrt{2} - i)$	$\frac{2(\sqrt{2}+i)}{3}$
3	$(1, -\sqrt{2}i, 1)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{n+1}(5) - \varphi_{n+1}(4))$	$-\frac{\sqrt{2}}{3}(\sqrt{2} - i)$	$\frac{2(\sqrt{2}+i)}{3}$
4	$(-1, \sqrt{2}i, 1)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{n+1}(3) - \varphi_{n+1}(6))$	$\frac{\sqrt{2}}{3}(\sqrt{2} + i)$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$
5	$(-1, \sqrt{2}i, 1)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{n+1}(3) - \varphi_{n+1}(6))$	$\frac{\sqrt{2}}{3}(\sqrt{2} + i)$	$\frac{2i}{3}$
6	$(1, -\sqrt{2}i, 1)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{n+1}(5) - \varphi_{n+1}(4))$	$-\frac{\sqrt{2}}{3}(\sqrt{2} - i)$	0
7	$(-1, \sqrt{2}i, -1)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{n+1}(1) - \varphi_{n+1}(8))$	$\frac{\sqrt{2}}{3}(\sqrt{2} - i)$	0
8	$(1, \sqrt{2}i, 1)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{n+1}(2) - \varphi_{n+1}(7))$	$-\frac{\sqrt{2}}{3}(\sqrt{2} + i)$	$\frac{2i}{3}$

## 4.4 Graphe dual

L'espace twistoriel, introduit par R.Penrose [23], est l'espace dont les points sont des rayons de lumière dans l'espace de Minkowski. Plus précisément, il existe un CR-sous variété réelle  $\mathcal{N}^5$  de dimension 5 dans  $\mathbb{C}P^3$ , dont les points sont les rayons de lumière (voir la partie 2.3.2). Pour plus de précision, on considère la variété grassmannienne complexe  $G_2(\mathbb{C}^4)$  qui est l'espace compactifié complexifié de  $\mathbb{M}$ ; c'est l'espace des 2-plans complexes qui passent par l'origine dans  $\mathbb{C}^4$ . Par la double fibration twistorielle, un point de  $\mathcal{N}^5$  détermine un  $\alpha$ -plan dans  $G_2(\mathbb{C}^4)$ , qui intersecte l'espace  $\mathbb{M}$  en une géodésique isotrope [27]. D'autre part,

pour un espace riemannien à courbure constante de dimension 3, on peut associer un mini espace twistoriel : c'est l'espace des géodésiques. Par exemple, le mini espace twistoriel de  $\mathbb{R}^3$ , est la surface complexe donnée par le fibré tangent de la sphère : c'est l'espace  $TS^2$  ; chaque ligne de  $\mathbb{R}^3$  définit sa direction  $u \in S^2$  et son vecteur de déplacement par rapport à l'origine  $c \in T_u S^2$  [1]. Étant donné cette correspondance, il est naturel de définir le graphe dual d'un graphe, dont les sommets sont les arêtes du graphe d'origine, et deux sommets sont adjacents si et seulement si les deux arêtes correspondantes du graphe d'origine sont liées. Le graphe dual est connu aussi sous le nom de *line-graph*.

Plus précisément, étant donné un graphe  $\Gamma = (V, E)$ , alors le graphe dual de  $\Gamma$  est le graphe  $L(\Gamma) = (E, T)$ , où, pour  $X, Y \in E$ , on a  $X \sim Y$  si et seulement si  $X$  et  $Y$  sont incidents dans  $\Gamma$ . Le seul graphe connexe isomorphe (il existe une bijection entre leurs sommets qui respectent la relation  $\sim$ ) à son dual, est le graphe cyclique. H. Whitney a montré que, à l'exception des graphes  $K_3$  et  $K_{1,3}$ , si deux graphes sont tels que leurs graphes duaux sont isomorphes, alors ces deux graphes sont isomorphes [28]. Il n'est évident que chaque graphe soit le graphe dual d'un graphe. Précisément, il existe neuf graphes tels que, si un graphe donné  $L$  ne contient pas comme sous-graphe, un de ces graphes, alors  $L = L(\Gamma)$  est le graphe dual d'un graphe  $\Gamma$  ([5] et [26]).

Comme dans la théorie des twisteurs, on peut établir une correspondance entre des objets d'un graphe et ceux de son dual.

Un graphe est complet si chaque sommet est rejoint à chaque autre sommet. Étant donné un graphe  $\Gamma = (V, E)$ , un sous-graphe  $\Sigma \subset \Gamma$  est un graphe  $\Sigma = (W, F)$  tel que  $W \subset V$  et  $F \subset E$ . De la même façon qu'un point de l'espace de Minkowski s'identifie avec tous les rayons de lumière passant par ce point (une copie de  $S^2 = \mathbb{CP}^1 \subset \mathcal{N}^5$ ), on peut identifier un sommet  $x$  de  $\Gamma$  avec toutes les arêtes  $e_1, \dots, e_{m(x)} \in E$  incidentes avec  $x$ . Ainsi, dans le graphe dual  $L(\Gamma)$ , chaque sommet  $e_i$  est connecté à chaque sommet  $e_j$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, \dots, m(x)$ , d'où le sous-graphe  $\Sigma = \langle e_1, \dots, e_{m(x)} \rangle \subset L(\Gamma)$  est un sous-graphe complet. À part des triangles dans  $L(\Gamma)$ , qui peuvent se déduire d'un triangle dans  $\Gamma$ , tout sous-graphe complet de  $L(\Gamma)$  correspond à un sommet  $\Gamma$  de cette manière. Un sous-graphe complet  $\Sigma \subset L(\Gamma)$  est donc l'analogue d'une copie de  $\mathbb{CP}^1 \subset \mathcal{N}^5 \subset \mathbb{CP}^1$ .

Maintenant, étant donné un graphe  $\Gamma = (V, E)$ , si on impose une direction sur chaque arête  $e \in E$ , alors étant donnée une 1-forme isotrope  $w$  sur  $\Gamma$  ; on peut associer une fonction complexe  $\psi$  définie sur  $L(\Gamma)$  de la manière suivante : soit  $e = \vec{xy} \in E$  une arête munie de sa direction, alors  $e$  correspond à un sommet  $l(e)$  de  $L(\Gamma)$ , on définit  $\psi(l(e)) = w(\vec{xy})$ . Si en plus,  $w$  est une 1-forme isotrope, alors pour chaque sous-graphe complet  $\Sigma \subset L(\Gamma)$  qui correspond à un point de  $\Gamma$ , on a

$$\sum_{e \in \Sigma} \psi(e)^2 = 0.$$

C'est en particulier le cas si  $w$  est la dérivée d'une fonction holomorphe  $\varphi$ . Si  $\Sigma(x)$  est le sous-graphe de  $L(\Gamma)$  correspondant au sommet  $x \in V$ , à  $\varphi$  vérifiant  $\sum_{y \sim x} (\varphi(y) - \varphi(x))^2 = 0$ , on associe  $\psi_\varphi$  (définie à un signe près qu'on peut fixer avec un choix de direction sur chaque

$e \in E$ ) vérifiant

$$\sum_{e \in \Sigma(x)} \psi_\varphi(e)^2 = 0.$$

On appelle  $\psi_\varphi$  la fonction duale de  $\varphi$ .

Dans les deux tableaux suivants, on va voir l'analogie entre, d'une part, la correspondance entre un graphe et son dual, d'autre part, la correspondance twistorielle de Penrose.

Correspondance twistorielle

$\mathbb{CP}^3$	$\mathbb{M}$
Point dans $\mathcal{N}^5$	Rayon de lumière
$\mathbb{CP}^1 \subset \mathcal{N}^5$	Point
Surface complexe $\mathcal{S} \subset \mathbb{CP}^3$	SFR

Correspondance entre un graphe et son dual

Graphe dual $L(\Gamma)$	graphe $\Gamma$
Sommet	arête
Sous-graphe complet	Sommet
Fonction duale	Fonction holomorphe

On donne dans la figure 4.5 le dual du graphe donné par la figure 4.3.

En conclusion, dans l'esprit de l'idée de Penrose, dont le rayon de lumière est l'objet de base, on doit considérer le graphe dual  $L(\Gamma)$  comme plus fondamental encore que  $\Gamma$ . Si en plus,  $L$  est un graphe muni d'une fonction complexe  $\psi$ , vérifiant les propriétés nécessaires afin qu'elle détermine une fonction holomorphe  $\varphi$  sur un graphe  $\Gamma$  qui se déduit de  $L$ , on peut espérer qu'une géométrie locale se déduise à partir de la projection orthographique de Gauss. En effet, en chaque sommet  $x$  de  $\Gamma$ , on a une famille de nombres complexes  $\{\varphi(y) - \varphi(x); y \sim x\}$  vérifiant  $\sum_{y \sim x} (\varphi(y) - \varphi(x))^2 = 0$  : ainsi un cube de dimension  $m(x)$  est défini en  $x$ .

On voit alors que la géométrie et le champ sont couplés ; c'est dans cette même perspective qu'on a étudié le triplet  $(M^3, U(t), g(t))$  dans la partie 3.3, où le champ de vecteurs  $U(t)$  et la métrique  $g(t)$  sont reliés.

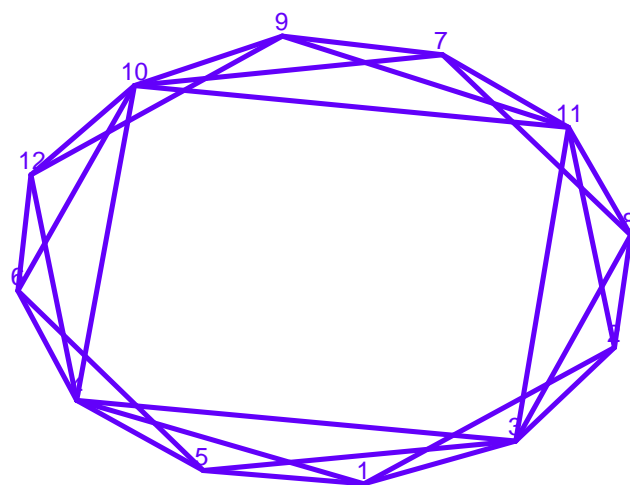


FIGURE 4.5 – Le dual du graphe donné par la figure 4.3

# Annexe A

## Formule intégrale pour une classe d'applications biharmoniques

On s'intéresse à des champs dans l'espace-temps (solutions de certaines équations) et leur description comme objets dans l'espace twistoriel.

On rappelle dans cette annexe la formule de Whittaker (1903) [29], qui donne une description twistorielle des solutions de l'équation de Laplace dans  $\mathbb{R}^3$ , afin de donner la description twistorielle des applications biharmoniques non semi-conformes.

La formule de Whittaker donne une expression locale de toute fonction harmonique  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ , solution de l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0$$

sous forme d'une intégrale sous un contour :

$$(A.1) \quad \varphi(x) = \oint f((1-z^2)x_1 + i(1+z^2)x_2 + 2zx_3, z) dz,$$

où  $f$  est une fonction analytique à 2 variables. On remarque que dans la formule de Whittaker, l'expression  $(1-z^2)x_1 + i(1+z^2)x_2 + 2zx_3$  correspondant à la représentation de toute fonction  $z$  semi-conforme, définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , dont les fibres sont données par des droites. Plus précisément,  $z$  est donnée par l'équation

$$\xi.x = 0,$$

où  $\xi(z) \in \mathbb{C}^3$  est holomorphe en  $z$  et vérifie  $\xi^2 = 0$ . Alors,  $\xi$  est donnée par :

$$\xi(z) = \frac{1}{2h(z)} (1-z^2, i(1+z^2), 2z),$$

où  $h$  est une fonction holomorphe qui ne s'annule pas sur  $U$ . Ce qui revient à dire que toute fonction semi-conforme  $z$ , dont les fibres sont données par des droites est solution de l'équation :

$$(1-z^2)x_1 + i(1+z^2)x_2 + 2zx_3 = 2h(z),$$

où  $h$  est une fonction holomorphe.

On a vu dans la partie 1.2.4 que toute application semi-conforme  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  dont les fibres sont des arcs de cercles a une représentation

$$|x|^2 + 2\xi \cdot x + \xi^2 = 0,$$

où  $\xi(z) \in \mathbb{C}^3$  est holomorphe en  $z$ .

Il est alors naturel d'essayer une formule intégrale du type

$$(A.2) \quad \varphi(x) = \oint \psi(|x|^2 + 2\xi \cdot x + \xi^2, z) dz$$

où  $\psi(y, z)$  est une fonction analytique à 2 variables, pour récupérer une classe d'applications biharmoniques  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  non semi-conformes.

Supposons que  $\varphi$  soit donnée par (A.2), alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \oint \partial_1 \psi \cdot 2(x_i + \xi_i) dz \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} &= \oint (\partial_{11}^2 \psi \cdot 4(x_i + \xi_i)^2 + 2\partial_1 \psi) dz \\ \Delta \varphi &= \sum_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = \oint (4\partial_{11}^2 \psi (x + \xi)^2 + 6\partial_1 \psi) dz, \end{aligned}$$

où  $\partial_1 \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ . Donc, en écrivant  $y = (x + \xi)^2$ , si  $2y\partial_{11}^2 \psi + 3\partial_1 \psi = 0$ , alors  $\varphi$  est harmonique, ce qui revient à dire que

$$\begin{aligned} \frac{\partial_{11}^2 \psi}{\partial_1 \psi} &= -\frac{3}{2y} \Leftrightarrow \ln \partial_1 \psi = -\frac{3}{2} \ln y + a(z) \\ &\Leftrightarrow \partial_1 \psi = \tilde{A}(z)y^{-\frac{3}{2}} \\ &\Leftrightarrow \psi = A(z)y^{-\frac{1}{2}} + B(z), \end{aligned}$$

où  $A(z)$  et  $B(z)$  sont deux fonctions méromorphes en  $z$ . On obtient la formule suivante pour représenter une classe d'applications harmoniques :

$$(A.3) \quad \varphi(x) = \oint \left( \frac{A(z)}{\sqrt{|x|^2 + 2x \cdot \xi + \xi^2}} + B(z) \right) dz,$$

où  $\xi = (\xi_1(z), \xi_2(z), \xi_3(z))$  est holomorphe en  $z$ .

**Remarque A.0.1.** *Il serait intéressant de connaître comment  $\varphi$ , donnée par l'équation (A.3) se déduit de la formule de Whittaker.*

**Exemple A.0.1.** Soit  $\xi = (z, 0, 0)$ ,  $A(z) = \frac{1}{z}$  et  $B(z) = 0$ . La formule (A.3), devient

$$\varphi(x) = \oint \frac{1}{z\sqrt{|x|^2 + 2x.\xi + \xi^2}} dz.$$

Alors, pour  $x \neq 0$ , la fonction  $\frac{1}{z\sqrt{z^2 + 2z.x_1 + |x|^2}}$  présente un pôle simple en  $z = 0$ . Si on l'entoure d'un contour évitant d'autres singularités, le résidu est donné par

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{z^2 + 2zx_1 + |x|^2}} = \frac{1}{|x|}$$

et  $\varphi(x) = \frac{2\pi i}{|x|}$ . On constate que la fonction  $\frac{1}{|x|}$  est bien harmonique dans  $\mathbb{R}_*^3$ .

Maintenant, on calcule le bilaplacien. Pour cela, on dérive deux fois le Laplacien par rapport à  $x_i$ , et en sommant, on trouve que :

$$\Delta(\Delta(\varphi)) = \oint (16\partial_{1111}^4 \psi(x + \xi)^2 (x + \xi)^2 + 80\partial_{111}^3 \psi(x + \xi)^2 + 60\partial_{11}^2 \psi) dz.$$

Alors,  $\varphi$  est biharmonique si

$$(A.4) \quad 4y^2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} + 20y \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + 15 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0,$$

où  $y = (x + \xi)^2$ .

On pose  $\gamma = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$ , d'où  $\varphi$  est biharmonique si

$$4y^2 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} + 20y \frac{\partial \gamma}{\partial y} + 15\gamma = 0.$$

On substitue  $y = A(z)y^k$ ; on peut donc calculer les valeurs de  $k$ ; on trouve  $k = -\frac{3}{2}$  ou  $k = -\frac{5}{2}$  et la solution générale serait donnée par

$$\gamma(y, z) = \alpha(z)y^{-3/2} + \beta(z)y^{-5/2},$$

pour des fonctions méromorphes  $\alpha(z)$  et  $\beta(z)$ . Puis on intègre

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \alpha(z)y^{-3/2} + \beta(z)y^{-5/2}$$

pour obtenir la solution générale de A.4

$$\psi(y, z) = A(z)y^{1/2} + B(z)y^{-1/2} + C(z)y + D(z),$$



où  $A(z), B(z), C(z)$  et  $D(z)$  sont des fonctions méromorphes. On note que, dans le cas où  $A(z) \equiv 0$  et  $C(z) \equiv 0$ , on obtient les applications harmoniques.

On en déduit qu'on peut caractériser localement une classe de fonctions biharmoniques, en général non semi-conformes et non-harmoniques, définies sur un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  à valeurs dans l'espace des nombres complexes, sous la forme :

$$\varphi(x) = \oint \left( A(z) \sqrt{|x|^2 + 2\xi \cdot x + \xi^2} + C(z)(|x|^2 + 2\xi \cdot x + \xi^2) + D(z) \right) dz,$$

où  $A(z), C(z)$  et  $D(z)$  sont des fonctions méromorphes et où  $\xi = \xi(z)$  est en général méromorphe.

**Exemple A.0.2.** Soit  $A(z) = \frac{1}{z}, \xi = (0, 0, 0), C(z) = D(z) = 0$ . Comme dans l'exemple précédent, on en déduit la fonction biharmonique  $\varphi(x) = |x|$ .

# Bibliographie

- [1] P. Baird and J.C.Wood, *Harmonic Morphisms Between Riemannian Manifolds*, London Math. Soc. Monogr.(N.S), Oxford Univ. Press(2003).
- [2] P. Baird, *Conformal foliation by circles and complex isoparametric functions on Euclidean 3-space*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc, 123 (1998), 273-300.
- [3] P. Baird and J. C. Wood, *The geometry of a pair of riemannian foliations by geodesics and assicoated harmonic morphisms*, Bull. Soc. Math. Belg. B, 44 (1992), 29-37.
- [4] P. Baird and J. C. Wood, *Bernstein theorems for harmonic morphisms from  $\mathbb{R}^3$  and  $S^3$* , Math. Ann .280 (1988), 679-603.
- [5] L. W. Beineke, *Derived graphs and digraphs*, dans :Beiträge zur Graphentheorie (eds.H.Sachs,H.Voss et H. Walther), Leipzig : Teubner 1968, pp. 17-33
- [6] I. Bobenko and C. Mercat, *Linear and nonlinear theories of discrete analytic functions. Integrable structure and isomonodromic Green's function*, J. Reine Angew. Math. 583 (2005), 117-161.
- [7] O. Bonnet, *Démonstration nouvelle de deux théorèmes de M. Bertrand*, Journal de l'École Polytechnique. Paris, (1886) 143-162.
- [8] E. Cartan, *The Theory of Spinors*, Herman Edt., 1938.
- [9] B. Chow, S.C. Chu, D. Glickenstein, C. Guenther, J. Isenberg, T. Ivey, D. Knopf, P. Lu, F. Luo and L. Ni, *The Ricci flow*, Techniques and applications, part 1 : Geometric aspects, AMS Mathematical surveys and monographs, 135, 2007.
- [10] E. Chung, *Spectral Graph Theory*, regional conference series in Mathematics 92, Amer. Math. Soc., Providence. (1992).
- [11] R. J. Duffin, *Potential theory on a rhombic lattice. J. Combinatorial Theory*, (1968), 5, 258-272.
- [12] M. G. Eastwood and R. Penrose, *Drawing with complex numbers*, Math. Intelligencer 22 (2000), 8-13.
- [13] J. Eells et J. H. Sampson, *Harmonic mappings between Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. 86,(1964) 109-160.
- [14] B. Fuglede, *Harmonic morphism between semi-riemannian manifolds*, Ann. Acad. Sci. Fennicae 21 (1996), 31-50. [07.06 1995]

- [15] B. Fuglede, *Harmonic morphisms between riemannian manifolds*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 28(2), (1978) 107-44.
- [16] C. F. Gauss, *Werke*, Zweiter Band, Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen (1876).
- [17] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, John Wiley and Sons, Inc, 1987.
- [18] S. W. Hawking et G. F. R. Ellis, *The Larger Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University press, 1973.
- [19] J. Jost, *Dynamical networks*, dans : Networks : From Biology to Theory, Springer London, 2007, 35-62.
- [20] E. Lebeau, *Applications harmoniques entre graphes finis et superrigidité*, Annales de l'institut de Fourier, tome 46, numéro 5 (1996) P.1183-1203.
- [21] R. Penrose and W. Rindler, *Spinors and Space-Time Volume 2*, Cambridge Univesity press 1986.
- [22] R. Penrose, *Angular momentum : an approach to combinatorial space-time*, dans Quantum Theory and Beyond, ed. T. Bastin, Cambridge Univ. Press (1971), pp.151-180.
- [23] R. Penrose, *Twistor algebra*, Journal of Mathematical physics, volume 8, (1967), 345-366.
- [24] C. Rovelli et C. Smolin *Spin networks and quantum gravity*, Phys.Rev.D52 (1995), 5743,5759.
- [25] H. Urakawa, *A discrete analogue of the harmonic morphism*, Glasgow Mathematical Journal (2000), 42 :3 :319-334 Cambridge University Pres.
- [26] A.C.M. Van Rooij et H.S. Wili, *The interchange graph of a finite graph*, Acta Math. Acad. Sci . Hung. 16 (1965), 263,269.
- [27] Ward, R. S. ; Wells, Raymond *Twistor Geometry and Field Theory*, Cambridge Univ Pr, July 1991.
- [28] H. Whitney, *Congruent graphs and the connectivity of graphs*, Amer. J. Math. 54 (1932), 150-168.
- [29] E. T. Whittaker, *On the Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Mathematische Annalen, Vol.57, (1903), P.333-355.